This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

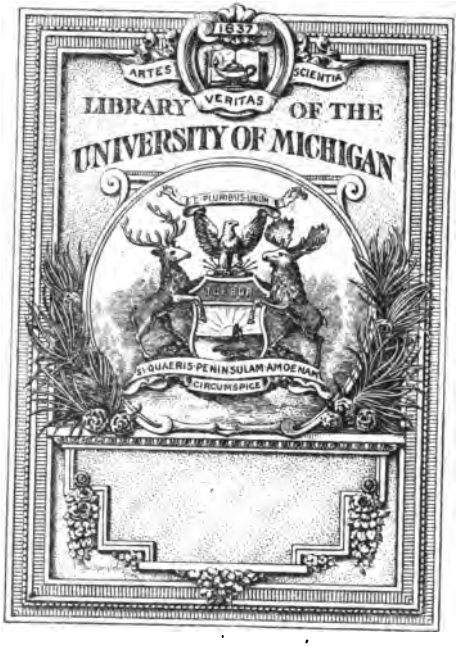
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

GRADUATE
QA
39
.B197
1885

Die

330-3

Elemente der Mathematik.

Von

Dr. Richard Baltzer

Professor an der Universität Gießen, Mitglied der k. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig.

Erster Band.

Gemeine Arithmetik, Allgemeine Arithmetik, Algebra.

Mit 6 in den Text eingedruckten Holzschnitten.

Siebente verbesserte und vermehrte Auflage.

Leipzig
Verlag von S. Hirzel.
1885.

Das Recht der Übersetzung ist vorbehalten.

Vorrede.

Das erste Buch dieser Elemente enthält einen kurzen Abriß des Rechenunterrichts zur Vorbereitung auf die allgemeine Arithmetik. Die Regel de tri, welche heute nicht mehr auf die Lehre von den Proportionen, sondern auf die Berechnung von Einheiten und Mehrheiten gegründet wird, konnte deshalb zum Vorteil der Lernenden weit in den Vordergrund gerückt werden. Einige Änderungen im Vortrag der Lehre von den gemeinen Brüchen und den Decimalbrüchen empfehlen sich durch die Erleichterung, welche sie dem Unterricht gewähren. Der Abschnitt über die Genauigkeit von Zahlangaben und Rechnungsresultaten bildet eine Ergänzung, deren die Rechenbücher nicht mehr entbehren dürfen. Die aufgenommenen Beispiele mit vollständiger Ausführung sollen als Paradigmen dienen; die überall gezeigten Proben der Rechnung machen einen größern Vorrat von Rechnungsaufgaben überflüssig.

Das zweite Buch besteht aus 4 Abschnitten, von denen der erste die 4 Species der Buchstabenrechnung zum Gegenstande hat; der zweite enthält die Quadratwurzeln mit den irrationalen und komplexen Zahlen, die Potenzen, Wurzeln und Logarithmen nebst den geometrischen Progressionen; der dritte das gemeine Binomialtheorem, die Kombinatorik und deren wichtigste Anwendungen; der vierte die Kettenbrüche, die Exponentialreihe, die Binomialreihe und Logarithmenreihe.

Das dritte Buch beginnt mit einer Einleitung, welche die Proportionen, Grundbegriffe von den Funktionen und die analytische Methode umfaßt. Der nächste Abschnitt behandelt die Lehre von den Gleichungen, die Bestimmung mehrerer Unbekannten durch ein System von Gleichungen, und insbesondere die quadratischen Gleichungen und Funktionen. Darauf folgt die Auflösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen, der numerischen transscendenten und höhern algebraischen Gleichungen, der einfacheren Diophantischen Aufgaben. Den Schluß machen die elementarsten Sätze der algebraischen Analysis d. i. der Lehre von den algebraischen Funktionen.

Die einzelnen Materien sind zumeist nach wissenschaftlichen Absichten gruppiert, dabei jedoch so unabhängig von einander bearbeitet, daß die Lehrer, welche das vorliegende Buch beim Unterricht gebrauchen wollen, wünschenswerte Freiheit in der Auswahl und Anordnung der Lehrstoffe behalten. Bei dem ersten Unterricht, dessen Material die Eingänge der einzelnen Paragraphen enthalten, ist von den weiteren

Ausführungen der Paragraphen gar manches zu streichen und erst gelegentlich nachzuholen. Die Algebra soll nicht etwa erst nach vollbrachtem Studium der hier gegebenen allgemeinen Arithmetik begonnen werden, es sind vielmehr ihre einzelnen Abschnitte zwischen die Abschnitte der allgemeinen Arithmetik einzuschalten. Man wird namentlich nach den vier Species der Buchstabenrechnung die Einleitung in die Algebra und die Gleichungen ersten Grades durchnehmen, dann die Quadratwurzeln mit den quadratischen Gleichungen und den Systemen von Gleichungen, dann die Potenzen, Wurzeln, Logarithmen und geometrischen Progressionen mit den transscendenten Gleichungen, dann die Kombinatorik u. s. w. Die Anordnung des Lehrbuchs soll den wissenschaftlichen Zusammenhang der im Lehrvortrag gesonderten Gegenstände auch äußerlich zur Anschauung bringen. Der analytische Gang des mündlichen Vortrags wird durch die synthetische Fassung des Lehrbuchs am wenigsten eingeschränkt. Den einzelnen Sätzen, Benennungen und Bezeichnungen ist ihre Geschichte in kurzen Notizen beigegeben worden.

Die Darstellung der Polyeder-Zahlen (II §. 28, 4) ist in der sechsten Auflage berichtigt und ergänzt worden; Herrn Cremona verdankte ich die Nachricht, daß die Unrichtigkeit, welche der Verbesserung bedurfte, von den Herren Moreno in Neapel und Caporali in Rom erkannt worden war. Zusätze sind in der neuen siebenten Auflage gemacht worden namentlich bei der Einführung der irrationalen und der komplexen Zahlen, bei den Determinanten, bei den figurierten Zahlen, sowie bezüglich der Bernoullischen Zahlen. Bei Einführung der Exponentialreihe habe ich die Einleitung über Konvergenzgebiete von Reihen weiter ausgedehnt, wodurch auch die Binomialreihe und die Logarithmenreihe in helleres Licht gesetzt werden konnten. In der Algebra hat das lineare System eine neue Darstellung erhalten. Bei den Gleichungen 3ten und 4ten Grades wurden die bekannten Lösungen der vollständigen Gleichungen hinzugefügt. Bei der Frage nach den Wurzeln einer Gleichung ist der sogenannte erste Cauchysche Existenzbeweis aus den ersten Auflagen dieses Buches wiederhergestellt worden. Endlich habe ich mich entschlossen, den kurzen Entwurf einer Tabelle zur Geschichte der Mathematik mit kulturhistorischen Seitenblicken hinzuzufügen; einen Versuch, den ich für nützlich halte, obgleich dessen Objektivität mir nicht zweifellos erscheint.

Die Sorge für korrekte Herstellung des Textes der siebenten Auflage hat Herr Dr. Weinmeister in Leipzig gütig übernommen, wofür ich ihm zugleich im Namen der Verlagshandlung meinen besten Dank ausspreche.

Inhalt.

Erstes Buch.

Gemeine Arithmetik.

§. 1. Addition und Subtraktion. §. 2. Multiplikation. §. 3. Division. Teil, Verhältnis, Bruch. §. 4. Rechnung mit mehrfach benannten Zahlen. Maßeinheiten. Resolvieren, Reducieren. Zeitrechnung. §. 5. Proportionalität von Größen. Berechnung der Mehrheit und der Einheit. §. 6. Regel de tri. Obersatz, Mittelsatz, Schlußsatz. Procente. §. 7. Teilbarkeit der Zahlen. Primzahlen, zusammengesetzte Zahlen. Relative Primzahlen, größter gemeinschaftlicher Divisor, kleinster gemeinschaftlicher Dividuus.

§. 8. Von den Brüchen. Echte, unechte Brüche. Gleiche Brüche. §. 9. Addition und Subtraktion der Brüche. Generalnenner. §. 10. Multiplikation und Division eines Bruches durch ganze Zahlen. §. 11. Multiplikation und Division durch einen Bruch. §. 12. Einfache und zusammengesetzte Regel de tri mit Brüchen. §. 13. Teilung nach gegebenen Verhältnissen. Proportion, insbesondere der Teile eines Ganzen. Gesellschaftsrechnung. Mischungsregel.

§. 14. Die Decimalbrüche. §. 15. Addition und Subtraktion der Decimalbrüche. §. 16. Multiplikation der Decimalbrüche. §. 17. Division der Decimalbrüche. Periodische unendliche Decimalbrüche. §. 18. Rechnung mit unvollständigen Decimalzahlen. Genauigkeit der Zahlangaben und Rechnungsresultate.

Zweites Buch.

Allgemeine Arithmetik.

§. 1. Grundbegriffe. Gleichartig, ungleichartig. Gleich, ungleich. Einheit, Zahl. Zahlwörter, Zahlzeichen. Zahlen im allgemeinen, Zahlenverbindungen. Definition, Theorem, Axiom. Beweis, Schluß. §. 2. Die Summe. §. 3. Das Produkt. §. 4. Die Potenz. §. 5. Die indirekten Operationen. §. 6. Die Formeln. §. 7. Die Differenz. Positive, negative Zahlen. Entgegengesetzte Größen. §. 8. Summe und Differenz von Polynomien. §. 9. Produkt von Polynomien. §. 10. Der Quotient. §. 11. Quotient von Produkten. Reciproke Größen. Grenzwerte. §. 12. Quotient von Polynomien. §. 13. Teilbarkeit der Zahlen. Primzahlen, zusammengesetzte Zahlen. Teilbarkeit von Produkten. Anzahl der Zahlen, welche prim zu einer gegebenen Zahl sind. Kongruenz von Zahlen nach einem Modul. Reste von Produkten und Potenzen, quadratische Reste und Nicht-Reste.

§. 14. Quadrat einer Decimalzahl. §. 15. Quadratwurzel einer Decimalzahl. §. 16. Lehrsätze von den Quadratwurzeln. Rationale, irrationale Zahlen. Reale, imaginäre, komplexe Zahlen. §. 17. Lehrsätze von den Potenzen. Potenzen mit negativen Exponenten. §. 18. Die Wurzel. Potenzen mit gebrochnen Exponenten. Die Wurzeln der Einheit, insbesondere die eigentlichen. §. 19. Der Logarithmus. Logarithmensysteme. §. 20. Die gemeinen Logarithmen der Decimalzahlen. Tabellen derselben. §. 21. Berechnung von Formeln mittelst der Logarithmen. Die Gaußsche Tabelle. §. 22. Die geometrische Progression. Die zusammengesetzte Zinsrechnung. Die Rentenrechnung.

§. 23. Potenzen der Binomien mit positiven ganzen Exponenten. Binomialcoefficienten, binomischer Lehrsatz. Grenzen der Wurzel eines Binomium. §. 24. Permutationen gegebener Elemente. §. 25. Variationen und Kombinationen gegebener Elemente. §. 26. Determinante eines Systems von Zahlen. §. 27. Produkte und Potenzen von Polynomien. §. 28. Figurierte Zahlen und arithmetische Progressionen. §. 29. Die Wahrscheinlichkeit. Zusammengesetzte Ereignisse. Hoffnungen.

§. 30. Die Kettenbrüche. §. 31. Die Exponentialreihe. §. 32. Die Binomialreihe und die Logarithmenreihe.

Drittes Buch.

Algebra.

§. 1. Die Proportionen. Kommensurable, inkommensurable Größen. Mittel zwischen gegebenen Größen. §. 2. Funktionen von Variablen. Proportionalität. Kontinuität einer Funktion, Fluxion (Differentialquotient). Algebraische, transscendente Funktion. Homogene, symmetrische, alternierende Funktionen. §. 3. Die analytische Methode. Berechnungen, Konstruktionen.

§. 4. Die Gleichungen. Identität. Nicht identische Gleichung, Wurzeln derselben. Abgeleitete Gleichungen von derselben Geltung. Geordnete Gleichung, Grad derselben. Algebraische, transscendente Gleichungen. §. 5. Systeme von Gleichungen mit mehreren Unbekannten, insbesondere von linearen Gleichungen. Unbestimmte Gleichung, bestimmtes System von Gleichungen. Lösung eines Systems linearer Gleichungen von bestimmter oder von unbestimmter Anzahl. §. 6. Die quadratischen Gleichungen. Maximum oder Minimum einer quadratischen Funktion. Reduktion einer quadratischen Form. Systeme von nicht linearen Gleichungen.

§. 7. Die kubischen und biquadratischen Gleichungen. Reciproke Gleichungen. §. 8. Transscendente Gleichungen und Auflösung numerischer Gleichungen. Exponentialgleichungen, logarithmische und goniometrische Gleichungen. Newtons Berechnung realer Wurzeln von algebraischen Gleichungen. §. 9. Besondere Auflösung unbestimmter Gleichungen. Auflösung der linearen Gleichungen in ganzen Zahlen. Die Pythagoreische Gleichung. Andere Beispiele.

§. 10. Lehrsätze von den algebraischen Funktionen. Divisoren einer ganzen Funktion. Die Gleichung $n$ten Grades hat nicht mehr als n Wurzeln. Eigenschaft der Coefficienten. Darstellung einer gebrochnen Funktion durch Partialbrüche. Divisoren einer ganzen Funktion mit ganzen Coefficienten. Fluxionen einer ganzen Funktion. Mehrfache Divisoren einer ganzen Funktion. Grenzen der realen Wurzeln einer Gleichung. Descartes' Regel. Sturmscher Satz. Cauchys Satz. Gauß' Satz. Nichtreale Wurzeln einer Gleichung. Konjugierte Werte einer algebraischen Funktion, Norm einer irrationalen Funktion. Resultante von zwei ganzen Funktionen. Größter gemeinschaftlicher Divisor von zwei ganzen Funktionen.

Erstes Buch.

Gemeine Arithmetik.

§. 1. Addition und Subtraktion.

1. Zu einer Zahl eine andere **addieren** heißt die Einheiten der zweiten Zahl zu der ersten hinzuzählen. Man bezeichnet $7 + 5 = 12$ und lieſt „7 plus 5 gleich 12". Die Zahl 12 heißt die **Summe** der Zahlen 7 und 5, welche die **Glieder** (Poſten) der Summe genannt werden.

Die Ordnung der Glieder iſt beliebig, z. B. $5 + 7 = 7 + 5$, $9 + 4 + 6 = 4 + 6 + 9$, u. ſ. w.

2. Von einer Zahl eine andere **ſubtrahieren** heißt die Einheiten der zweiten Zahl von der erſten abzählen. Man bezeichnet $12 - 7 = 5$ und lieſt „12 minus 7 gleich 5, oder 7 von 12 bleibt 5". Die Zahl 5 heißt die **Differenz** (Unterſchied) der Zahlen 12 und 7, von denen jene der **Minuendus**, dieſe der **Subtrahendus** genannt wird.

Die Differenz zweier Zahlen iſt die Zahl, welche mit der zweiten eine Summe giebt, die der erſten gleichkommt; z. B. $12 - 7 = 5$, weil $5 + 7$ oder $7 + 5 = 12$. Alſo:

$$\text{Differenz} + \text{Subtrahendus} = \text{Minuendus}.$$

Die Differenz giebt an, **um wieviel** der Minuendus mehr iſt als der Subtrahendus, und um wieviel der Subtrahendus weniger iſt als der Minuendus, z. B. 12 iſt mehr als 7, und 7 iſt weniger als 12, und zwar um $12 - 7$ d. i. 5.

3. Man kann nur Gleichartiges addieren und ſubtrahieren, z. B. Einer und Einer, Zehner und Zehner, Pfennig und Pfennig, Thaler und Thaler, Pfund und Pfund, u. ſ. w. Summe und Differenz ſind mit den Gliedern gleichbenannt.

Praktiſche Bemerkungen. Man ſpricht und ſchreibt größere Zahlen in Abteilungen von drei Stellen (Einer, Tauſende, Millionen, . .) z. B.

983 017 beſſer als 983017
98 704 327 beſſer als 98704327

und ſetzt bei der Addition und Subtraktion derſelben genau Einer unter Einer u. ſ. w.

Bei der Addition vieler Glieder begleitet man die Bewegung des Auges mit der Feder, spricht nur die Summen aus und zwar im taktmäßigen Fortschritt, also bei den Einern des folgenden Beispiels nicht $6 + 7 = 13$, $13 + 3 = 16$, $16 + 8 = 24$, $24 + 4 = 28$, sondern sofort 6, 13, 16, 24, 28, während man mit Auge und Feder die Reihe durchläuft. Die gefundenen 2 Zehner bilden den Anfang der nächsten Summe und werden zu größerer Sicherheit über die Reihe der Zehner bemerkt.

Zur Einübung addiert man die Glieder einzeln oder gruppenweise und subtrahiert von der Summe wieder die einzelnen Glieder.

$^{2}\ ^{33}\ ^{22}$ 76 856	76 856	749 574	1445 088
+ 9 237	+ 9 237	+ 76 856	− 76 856
+568 683	86 093	+ 9 237	1368 232
+ 40 738	+568 683	835 667	9 237
+749 574	654 776	568 683	1358 995
1445 088	+ 40 738	+ 40 738	−568 683
	695 514	609 421	790 312
	+749 574	+835 667	− 40 738
	1445 088	1445 088	749 574
			−749 574
			0

Man ist Störungen beim Rechnen weniger ausgesetzt, wenn man die gedachten Zahlen (auch leise) zu sprechen sich entwöhnt.

Beim Kopfrechnen ist es vorteilhaft, mit den **höchsten** Stellen anzufangen; z. B. $37 + 24 = 57 + 4 = 61$, $74 - 38 = 44 - 8 = 36$. Statt 96 zu addieren, addiert man 100 und subtrahiert von der Summe 4. Statt 95 zu subtrahieren, subtrahiert man 100 und addiert zur Differenz 5, u. s. w.

§. 2. Multiplikation.

1. Eine Zahl mit einer andern **multiplicieren** heißt die erstere sovielmal als Glied einer Summe setzen, als die zweite angiebt. Man bezeichnet die Summe $7 + 7 + 7$ mit $7 . 3$ oder 7×3 und liest „7 multipliciert mit 3“, oder auch „7 mal 3“ (eigentlich 3mal 7). Die Zahl 21 heißt das **Produkt** der Zahlen 7 und 3, von denen jene der **Multiplikandus**, diese der **Multiplikator** genannt wird.

2. Multiplikandus und Multiplikator können ohne Veränderung des Produkts vertauscht werden und heißen **Faktoren** des Produkts. Es ist

$$7 . 3 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 3 . 7$$
$$+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$
$$+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

weil 3 Reihen von je 7 Einheiten, von der Seite betrachtet, 7 Reihen von je 3 Einheiten bilden. Ebenso findet man $6 \times 7 \times 3 = 6 \times 3 \times 7$, indem man 6 statt 1 setzt.

Die Ordnung der Faktoren ist beliebig. Daher $5 \times 25 \times 125 \times 2 \times 4 \times 8 = 5 \times 2 \times 25 \times 4 \times 125 \times 8 = 10 \times 100 \times 1000 = 1000\,000$, $25 \times 36 = 25 \times 4 \times 9 = 100 \times 9 = 900$ u. s. f. Statt mit 42 zu multiplicieren, kann man mit 7 multiplicieren und das Produkt mit 6, u. s. f.

3. Der Multiplikator kann nur eine unbenannte Zahl sein, weil er die gleichen Glieder zählt, deren Summe das Produkt ist; z. B. 7 Thlr. $\times$ 5 = 7 $\times$ 5 d. i. 35 Thlr. Das Produkt ist mit dem Multiplikandus gleichbenannt.

Praktische Bemerkungen. Bei mehrstelligen Zahlen beginnt man entweder mit der letzten Stelle des Multiplikators, oder besser*) mit seiner höchsten zu multiplicieren, nachdem man dieselbe fest in den Sinn genommen.

7536 . 26847	7536 . 26847
52752	15072
30144	45216
60288	60288
45216	30144
15072	52752
202318992	202318992

Man nimmt nacheinander 6×7 Einer, 3×7 Zehner, 5×7 Hunderte, 7×7 Tausende u. s. f., oder 6×2 Zehntausende, 3×2 Hunderttausende, 5×2 Millionen u. s. f., ohne Umstellungen in Gedanken zuzulassen.

Zur Einübung ist die Probe wesentlich:

26847 $\times$ 7536
187929
134235
80541
161082
202318992

Das Produkt einer 5stelligen Zahl mit einer 4stelligen Zahl hat $5 + 4$ d. i. 9 oder 8 Stellen, weil $10\,000 \times 1000 = 10\,000\,000$, und $99\,999 \times 9999$ weniger als $100\,000 \times 10\,000$ d. i. $1000\,000\,000$ u. s. f.

Bei drei Faktoren kann man zur Übung den ersten mit dem zweiten multiplicieren, das Produkt mit dem dritten; dann den ersten mit

*) Um der in §. 18 gezeigten Abkürzungen willen.

dem dritten, und das Produkt mit dem zweiten; dann den zweiten mit dem dritten, und das Produkt mit dem ersten. Jedesmal muß dieselbe Zahl gefunden werden.

Statt die Summe oder Differenz zweier Zahlen zu multiplicieren, kann man die Glieder einzeln multiplicieren und die Produkte addieren oder subtrahieren, u. s. f.

Beim Kopfrechnen fängt man mit der höchsten Stelle des Multiplikandus an; z. B. $365 \times 7 = 2100, + 420$ d. i. $2520, + 35$ d. i. 2555. Man findet

$48 \times 17 = 50 \times 17$ d. i. $850, - 2 \times 17 = 816$
$48 \times 5 = 24 \times 10 = 240$
$48 \times 25 = 12 \times 100 = 1200$
$48 \times 15 = 240 \times 3 = 720$
$48 \times 75 = 1200 \times 3 = 3600$, u. s. w.

§. 3. Division.

1. Eine Zahl durch eine andere **dividieren** heißt die Zahl angeben, welche mit der zweiten ein Produkt giebt, das der ersten gleichkommt. Man bezeichnet $35 : 7$ und lieſt „35 **durch** 7 dividiert, oder 7 in 35". Dies giebt 5, weil 5×7 oder $7 \times 5 = 35$. Die Zahl 5 heißt der **Quotient** der Zahlen 35 und 7, von denen jene der **Dividendus**, diese der **Divisor** genannt wird.

Der Quotient ist also die Zahl, welche mit dem Divisor multipliciert, oder mit welcher der Divisor multipliciert den Dividendus giebt. Also:

Quotient × Divisor = Dividendus.

2. Entweder ist der Divisor **unbenannt**, und der Quotient der sovielte **Teil** des Dividendus als der Divisor angiebt,

oder der Divisor ist **mit dem Dividendus gleichbenannt**, und der Quotient das **Verhältnis** des Dividendus zum Divisor, d. h. er giebt an, wievielmal der Divisor im Dividendus enthalten, wievielmal so groß der Dividendus ist als der Divisor.

Z. B. $35 : 7 = 5$ d. h. 5 ist der 7te Teil von 35, 7 in 35 ist 5mal enthalten, 35 ist 5mal so groß als 7.

35 Thlr. : 7 Thlr. = 5 d. h. das Verhältnis von 35 Thalern zu 7 Thalern ist 5, 7 Thaler sind in 35 Thalern 5mal enthalten, 35 Thaler ist 5mal soviel als 7 Thaler.

Das Verhältnis von 36 Thalern zu 9 Thalern, von 36 Pfund zu 9 Pfund, von 36 Fuß zu 9 Fuß u. s. w. ist das Verhältnis von 36 zu 9 d. i. 4. Denn da $9 \times 4 = 36$, so sind 9 Thlr. $\times 4 = 36$ Thlr., 9 Pfd. $\times 4 = 36$ Pfd., $9' \times 4 = 36'$ u. s. w.

3. Wenn der Dividendus nicht ein Vielfaches vom Divisor ist, so geht die Division nicht auf, und es bleibt ein Rest; der Quotient fällt zwischen zwei aufeinander folgende natürliche Zahlen und kann nur mit Hilfe eines Bruches angegeben werden.

$56 : 7 = 8$, weil $56 = 7 \times 8$, ein Vielfaches von 7.
$91 : 7 = 13$, weil $91 = 7 \times 13$, " " " "

$23 : 7$ ist mehr als 3 und weniger als 4, weil $7 \times 3 = 21$ und $7 \times 4 = 28$. Die Differenz 2 zwischen 23 und 21, welche ein Rest heißt, soll auch durch 7 dividiert werden. Nun ist $1 : 7$ der 7te Teil von 1, welcher $\frac{1}{7}$ bezeichnet und 1 Siebentel gelesen wird. Ferner ist $2 : 7$ der 7te Teil von 2, mithin 2mal so groß als der 7te Teil von 1, also $= \frac{2}{7}$ (2 Siebentel). Daher ist $23 : 7 = 3\frac{2}{7}$, d. h. der 7te Teil von 23 ist $3\frac{2}{7}$, das Verhältnis von 23 zu 7 ist $3\frac{2}{7}$. Die künstlichen Ausdrücke

23 ist $3\frac{2}{7}$mal so groß als 7, 7 ist $3\frac{2}{7}$mal in 23 enthalten,
23 ist das $3\frac{2}{7}$fache von 7, 7 ist der $3\frac{2}{7}$te Teil von 23,

werden beim Rechnen mit Vorteil angewendet.

Die Zahlen $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, . . heißen Brüche, die obere Zahl der Zähler (er zählt die Teile), die untere der Nenner des Bruches (er benennt die Teile). Mit Vorbehalt der Rechnung kann man $5317 : 683 = 5317_{683}$ setzen, und die Bezeichnungen $5317 : 683$ und 5317_{683} als gleichbedeutend gebrauchen.

4. Ist ein Bruch neben der ganzen Zahl des Quotienten unbeträchtlich oder unzulässig (bei Individuen), so achtet man ihn für 1 oder für 0, je nachdem der Zähler die Hälfte des Nenners und der Bruch den Wert $\frac{1}{2}$ übersteigt oder nicht. $39 : 11$ ist genauer 4 als 3, weil 39 näher an 44 als an 33 liegt, oder der Rest 6 mehr als die Hälfte von 11 beträgt. Dagegen ist $43 : 8$ genauer 5 als 6.

Z. B. um den Durchschnitt (das arithmetische Mittel, einen Näherungswert) gegebener Werte zu berechnen, dividiert man ihre Summe durch ihre Anzahl; der Quotient wird als Näherungswert ohne Bruch angegeben, z. B.

4726
4754
4698
4719
18897 : 4
4724

Also ist 4724 der Durchschnittswert der gegebenen Zahlen.

Praktische Bemerkungen. Zur Einübung ist die Probe wesentlich, daß man den Quotienten mit dem Divisor multipliciert, um den Dividendus wieder zu erhalten; z. B.

253	827 : 385 = 659$\frac{112}{385}$		659	$\frac{112}{385}$. 385	
231	0		197	7	
22	82		52	72	
19	25		3	295	
3	577			112	
3	465		253	827	
	112				

Um die Hunderte des Quotienten zu finden, überlegt man, daß 385 in 2538 Hundert nahe sovielmal enthalten ist, als 3 Hundert in 25 Hundert, oder näher sovielmal, als 4 Hundert in 25 Hundert (weil 385 näher 400 als 300), oder als 4 in 25 u. s. f. Die Quotienten sind bei vermehrtem Divisor etwas zu vergrößern, z. B. 4 in 35 wurde 9mal genommen.

Bei der Probe giebt der 385te Teil von 112 385mal genommen das Ganze 112.

Endigt der Divisor mit Nullen, so kann man dieselben während der Rechnung mit ebenso viel Stellen am Ende des Dividendus unbeachtet lassen; z. B.

327	456 : 6400 =	3274,56 : 64,00 =	51$\frac{1056}{6400}$				
		320					
		74					
		64					
		10					

327 400 : 6400 = 3274 : 64, denn 64 Hundert sind in 3274 Hundert sovielmal enthalten, als 64 in 3274.

Statt durch 15 zu dividieren, kann man den 5ten Teil durch 3 dividieren. Statt durch 25 zu dividieren, kann man das 4fache durch 100 dividieren, u. s. w.

Um durch 4 zu dividieren, beachtet man, zwischen welchen der Zahlen 40, 80, 120, 160, 200, 240, 280, . . der Dividendus liegt, u. s. w.

§. 4. Rechnung mit mehrfach benannten Zahlen.

1. Zur Vermeidung der Brüche hat man die verschiedenen Maßeinheiten eingeteilt und bestimmten Teilen derselben besondere Namen gegeben. Die größeren Maßeinheiten dienen zur leichteren Auffassung großer Mengen kleinerer Einheiten.

Geldeinheiten:

Thaler (30) $\left\{\begin{matrix}\text{Silbergroschen (12)}\\ \text{Neugroschen (10)}\end{matrix}\right.$ Pfennig. Gulden $\left\{\begin{matrix}(60)\ \text{Kreuzer}\\ (100)\ \text{Neukreuzer.}\end{matrix}\right.$

Mark = $\frac{1}{3}$ Thaler (100) Pfennig. 30 Thaler enthalten 1 Pfund Silber, 1395 Mark enthalten 1 Pfund Gold.

Franc (100) Centime. Franc = 20 Sous.

Livre Sterling (20) Shilling (12) Penny. Guinee = 21 Shill.

Zahleinheiten:

Groß (12) Dutzend (12) Stück.

Schock (4) Mandel (15) Stück.

Ballen (10) Ries (20) Buch $\left\{\begin{matrix}24\ \text{Schreib-}\\ 25\ \text{Druck-}\end{matrix}\right\}$ Bogen.

Zeiteinheiten:

Tag (24^h) Stunde (60′) Minute (60″) Sekunde.

Jahr (12) Monat (30) Tag, bei geschäftlichen Rechnungen.

Längeneinheiten:

Rute $\left\{\begin{matrix}12'\\ 10'\end{matrix}\right\}$ Fuß $\left\{\begin{matrix}12''\\ 10''\end{matrix}\right\}$ Zoll $\left\{\begin{matrix}12'''\\ 10'''\end{matrix}\right\}$ Linie.

Die obere Einteilung ist nach dem Duodecimalsystem, die untere nach dem Decimalsystem durchgeführt.

Kilometer (1000) Meter (100) Centimeter (10) Millimeter. Abkürzungen: km, m, cm, mm.

Meile (2000^0) Rute. Meile = 7500 Meter. Elle (24) Zoll.

Winkeleinheiten:

Gestreckter Winkel (2^r) Rechter Winkel (90^0) Grad (60′) Minute (60″) Sekunde.

Flächeneinheiten:

Gewöhnlich Quadrateinheiten, d. h. Quadrate, deren Seiten Längeneinheiten sind, z. B. Quadratfuß, ein Quadrat, dessen Seite ein Fuß ist.

Wenn ein Fuß $\left\{\begin{matrix}12\\ 10\end{matrix}\right\}$ Zoll hat, so hat 1 Quadratfuß (□′) $\left\{\begin{matrix}12\times 12\\ 10\times 10\end{matrix}\right.$ d. i. $\left\{\begin{matrix}144\\ 100\end{matrix}\right.$ Quadratzoll (□″) u. s. w.

Feldmaße: Morgen (180 □Ruten), Are (100 □Meter). Acker, Scheffel Aussaat, u. dgl. Abkürzungen: a, qm, u. s. w.

Raumeinheiten:

Gewöhnlich Kubikeinheiten, d. h. Würfel, deren Kanten Längeneinheiten und deren Seiten folglich Quadrateinheiten sind, z. B. Kubikfuß, ein Würfel (Kubus), dessen Kante ein Fuß ist.

Wenn 1 Fuß $\left\{\begin{matrix}12\\10\end{matrix}\right\}$ Zoll hat, so hat 1 Kubikfuß $\left\{\begin{matrix}12\times12\times12\\10\times10\times10\end{matrix}\right.$

d. i. $\left\{\begin{matrix}1728\\1000\end{matrix}\right.$ Kubikzoll u. s. w.

Für Flüssigkeiten:

Fuder (4) Oxhoft ($1\frac{1}{2}$) Ohm (2) Eimer (2) Anker (30) Quart.

Faß. Tonne. Kanne. Kubikmeter (1000) Liter; cbm, l.

Für Getreide:

Wispel (2) Malter (12) Scheffel (4) Viertel (4) Metzen. Scheffel = 50 Liter.

Für feste Körper z. B. Holz: Klafter. Stère (Kubikmeter).

Gewichtseinheiten:

Centner (110) Pfund (32) Lot (4) Quentchen. Centner (5) Stein.

Centner (100) Pfund (30) Lot (10) Quent (10) Cent.

Mark (16 Lot). Karat ($\frac{1}{3}$ Lot).

Unze (8) Drachme = Quentchen (60) Gran.

Kilogramm (1000) Gramm (1000) Milligramm. Pfund ($\frac{1}{2}$ Kilogramm).

Tonne (1000 Kilogramm): kg, g, mg, t.

2. Eine Preisangabe in Thalern, Groschen und Pfennigen, eine Längenangabe in Fuß, Zoll und Linien, eine Gewichtsangabe in Centnern, Pfund und Lot u. s. w. heißt eine mehrfach benannte Zahl. Man kann die höheren Einheiten durch Multiplikation in niedere verwandeln (resolvieren), und die niederen Einheiten durch Division in höhere (reducieren); z. B. Thaler werden in Silbergroschen verwandelt, indem man sie mit 30 multipliciert, 25 Thaler = 25×30 d. i. 750 Sgr. Pfennige werden in Silbergroschen verwandelt, indem man sie durch 12 dividiert, 319 Pf. = 319 : 12 d. i. $26\frac{7}{12}$ Sgr. = 26 Sgr. 7 Pf.

3. Man rechnet mit mehrfach benannten Zahlen nach denselben Regeln, wie mit mehrstelligen Zahlen, welche aus Einern, Zehnern, Hunderten u. s. f. bestehen. Addition, Subtraktion, Multiplikation mehrfach benannter Zahlen beginnt man bei den niederen Einheiten, Division bei den höheren. Auch kann man anfangs resolvieren, mit den niederen Einheiten die verlangte Rechnung vornehmen und die gefundene Zahl reducieren.

Um $\frac{5}{7}$ Thlr. aufzulösen, berechnet man den 7ten Teil von 5 Thlr. oder 150 Sgr. und erhält $21\frac{3}{7}$ Sgr. Ebenso ist $\frac{3}{7}$ Sgr. der 7te Teil von 3 Sgr. oder 36 Pf. = $5\frac{1}{7}$ Pf. Also ist $\frac{5}{7}$ Thlr. = 21 Sgr. $5\frac{1}{7}$ Pf.

Um das Verhältnis 25 Ctr. 106 Pfd. : 3 Ctr. 78 Pfd. zu berechnen, verwandelt man beide Gewichte in Pfund. Nun sind 408 Pfd.

in 2856 Pfd. sovielmal enthalten als 408 in 2856, nämlich 7mal. Also ist 7 das gesuchte Verhältnis, d. h. 3 Ctr. 78 Pfd. sind in 25 Ctr. 106 Pfd. 7mal enthalten.

Die einfache Zeitrechnung sucht entweder aus zwei Terminen (Epochen) die Zwischenzeit, oder aus einem Termin und der Zwischenzeit den andern Termin.

a. Wie lang ist die Zeit von 1818 den 29. Oktbr. bis 1832 den 17. März? Vom 29. Oktbr. 1818 bis 1819 sind 64 Tage, von 1819 bis 1832 sind 13 Jahre, und bis zum 17. März 76 Tage, also überhaupt 13 Jahre 140 Tage verflossen.

Wie lang ist die Zeit von 1815 den 12. Mai bis 1837 den 7. Sept.? Von 12. Mai bis 7. Sept. 1815 sind 118 Tage und bis 7. Sept. 1837 noch 22 Jahre verflossen.

b. Welches Datum ist 13 Jahre 216 Tage nach dem 21. Juni 1820? 194 Tage nach dem 21. Juni ist der 1. Jan. 1821, die übrigen 22 Tage und 13 Jahre später ist der 23. Jan. 1834.

c. Welches Datum ist 56 Jahre 86 Tage vor dem 7. März 1844? 67 Tage vor dem 7. März 1844 ist der letzte Dec. 1843, die übrigen 19 Tage und 56 Jahre früher ist der 12. Dec. 1787.

Weniger genau löst man diese Aufgaben, wenn man das Jahr zu 12 Monaten und den Monat zu 30 Tagen annimmt.

§. 5. Proportionalität von Größen*).

1. Eine Größe heißt abhängig von einer andern Größe, wenn eine Änderung der letztern eine Änderung der erstern zur Folge hat. Z. B. die Länge eines Metallstabes ist abhängig von der Temperatur, weil eine Änderung der Temperatur eine Verlängerung oder Verkürzung des Stabes nach sich zieht; der Preis einer Ware ist abhängig von ihrer Menge, Güte, Seltenheit, von der Nachfrage u. s. w.

2. Eine Größe heißt einer andern Größe proportional, wenn sie von ihr so abhängt, daß sie, während die andere mehrmal so groß wird, ebensovielmal so groß wird.

Der Preis einer Ware ist in vielen Fällen ihrem Gewicht proportional d. h.

5 Pfd. kosten 5mal soviel als 1 Pfd.

1 Pfd. kostet den 7ten Teil soviel als 7 Pfd.

Ausnahmen bilden die Preise von Edelsteinen, Glasscheiben, Nutzhölzern u. dgl.

*) Vergl. im 3ten Buche §. 2.

Die Arbeit ist der Kraft proportional d. h.
8 Arbeiter leisten 8mal soviel als 1 Arbeiter,
1 Arbeiter leistet den 4ten Teil soviel als 4 Arbeiter.

Die Zinsen sind dem Kapital proportional d. h.
19 Thlr. Kapital geben 19mal soviel Zinsen als 1 Thlr. Kap.,
1 Thlr. Kap. giebt den 100ten Teil soviel Zinsen als 100 Thlr. Kap.

3. Eine Größe heißt einer andern Größe umgekehrt (indirekt) proportional, wenn sie, während die andere mehrmal so groß wird, den ebensovielten Teil so groß wird.

Bei einer Arbeit ist die Zeit der Kraft umgekehrt proportional d. h.
4 Arbeiter brauchen den 4ten Teil soviel*) Zeit als 1 Arb.,
1 Arbeiter braucht 5mal soviel Zeit als 5 Arb.

Bei gegebener Fläche ist die Breite eines Rechtecks der Länge umgekehrt proportional, d. h. man braucht
bei 60 Fuß Länge den 60ten Teil soviel Breite als bei 1 Fuß Länge,
bei 1 Fuß Länge 50mal soviel Breite als bei 50 Fuß Länge.

Mit einem Vorrat reichen
9 Mann den 9ten Teil so lange als 1 Mann,
1 Mann 7mal so lange als 7 Mann.

Für einen gewissen Preis schafft man
3 Ctr. den 3ten Teil so weit als 1 Ctr.,
1 Ctr. 5mal so weit als 5 Ctr.

Eine gespannte Saite oder die Luft in einer Orgelpfeife schwingt in bestimmter Zeit
bei 3 Fuß Länge den 3ten Teil so oft als bei 1 Fuß Länge,
bei 1 Fuß Länge 2mal so oft als bei 2 Fuß Länge.

4. Eine Größe heißt dem Quadrat oder Kubus einer andern Größe proportional, wenn sie, während die andere 2, 3, 4, . . mal so groß wird, 2.2, 3.3, 4.4, . . mal so groß, oder 2.2.2, 3.3.3, 4.4.4, . . mal so groß wird.

Eine Größe heißt dem Quadrat einer andern Größe umgekehrt proportional, wenn sie, während die andere 2, 3, 4, . . mal so groß wird, den 2.2ten, 3.3ten, 4.4ten, . . Teil so groß wird.

Der Preis eines Diamanten ist dem Quadrat seines Gewichts proportional, d. h. der Diamant kostet
3 Karat schwer 3.3mal soviel als 1 Karat schwer,
1 Karat schwer den 2.2ten Teil soviel als 2 Karat schwer.

---

*) Man sagt besser: „den 4ten Teil soviel", als „4mal weniger".

Bei einem freigelassenen Körper ist die Falltiefe dem Quadrat der Fallzeit proportional, d. h. der Körper fällt

in 4 Sekunden 16mal so tief als in 1 Sek.,
in 1 Sekunde den 9ten Teil so tief als in 3 Sek.

Die Quadratfläche ist dem Quadrat der Seite, die Kreisfläche und die Kugelfläche dem Quadrat des Radius proportional.

Der Würfelinhalt ist dem Kubus der Kante, der Kugelinhalt dem Kubus des Radius proportional, d. h. der Würfel ist

bei 3 Fuß Kante 27mal so groß als bei 1 Fuß Kante,
bei 1 Fuß Kante den 64ten Teil so groß als bei 4 Fuß Kante.

Die Beleuchtung einer kleinen Fläche ist dem Quadrat des Lichtabstandes umgekehrt proportional, d. h. sie ist

4 Fuß vom Licht den 4.4ten Teil so groß als 1 Fuß vom Licht,
1 Fuß vom Licht 9mal so groß als 3 Fuß vom Licht.

Das Gewicht eines Körpers ist dem Quadrat des Abstandes vom Erdcentrum umgekehrt proportional. Die Pendellänge ist dem Quadrat der Anzahl der Schwingungen, welche das Pendel in gegebener Zeit macht, umgekehrt proportional.

§. 6. Regel de tri.

Wenn einer Größe (A) eine andere Größe (B) proportional ist, und ein Paar zusammengehörige Werte der Größen gegeben sind, so läßt sich für jeden Wert der einen (A) der entsprechende Wert der andern (B) berechnen. Die Anleitung zu dieser Berechnung heißt Regel de tri.

1. Aufgabe: Wenn man für 9 Thlr. 7 Pfd. einer Ware erhält, wieviel kosten 13 Pfd.?

Man bildet nach der Frage die vorläufige Antwort so, daß die gesuchte Größe den Schluß macht:

13 Pfd. kosten irgend wieviel Thaler.

Diesem Satze wird aus der Aufgabe der Obersatz nachgebildet:

7 Pfd. kosten 9 Thaler.

Durch den Einheitsschluß „1 Pfd. kostet den 7ten Teil soviel als 7 Pfd." (§. 5) erhält man den Mittelsatz:

1 Pfd. kostet 9 Thaler : 7

oder wie man auch bezeichnen kann (§. 3, 3)

1 Pfd. kostet $\frac{9 \text{ Thlr.}}{7}$ („9 Thlr. durch 7, oder $\frac{9}{7}$ Thlr.").

Der Mehrheitsschluß „13 Pfd. kosten 13mal soviel als 1 Pfd." (§. 5) fordert, den 7ten Teil von 9 Thlr. 13mal zu nehmen, d. i. den 7ten Teil von 9×13 Thlr. So erhält man den Schlußsatz:

13 Pfd. kosten $\frac{9 \text{ Thlr.} \times 13}{7}$ („9 Thlr. mal 13, durch 7").

Die nun vorzunehmende Ausrechnung $9 \times 13 = 117$ und $117 : 7 = 16\frac{5}{7}$ ergiebt die gesuchte Antwort:

13 Pfd. kosten $16\frac{5}{7}$ Thlr.

2. Ist in der vorläufigen Antwort die gegebene Größe eine mehrfach benannte Zahl oder anders benannt als die gleichartige Größe der Aufgabe, so bringe man vor Bildung der Sätze beide auf gleiche Benennung.

Wenn man für 9 Thlr. 17 Sgr. 7 Pfd. 12 Lot erhält, wieviel kosten 13 Pfd. 4 Lot? Statt 13 Pfd. 4 Lot hat man 420 Lot, und statt 7 Pfd. 12 Lot hat man 236 Lot zu nehmen. Dann verfährt man wie oben. Bei der Ausrechnung kann man auch 9 Thlr. 17 Sgr. in Sgr. verwandeln, was jedoch nicht notwendig ist. (Vergl. §. 4.)

Wenn man für 9 Thlr. 17 Sgr. 7 Pfd. erhält, wieviel kosten 24 Lot? Statt 7 Pfd. führt man 224 Lot ein, u. s. w.

3. Aufgabe: Wie lange brauchen 28 Arbeiter zu einem Werke, welches 16 Arbeiter in 15 Wochen vollenden?

Auflösung: 16 Arbeiter brauchen 15 Wochen
1 " braucht 15 W. $\times$ 16 (16mal soviel)
28 " $\frac{15 \text{ W.} \times 16}{28}$ (den 28ten Teil soviel)

Ausrechnung: 15×16

$240 : 28 = 8$ W. $3\frac{1}{7}$ Tage, die Arbeitswoche zu 6 Tagen gerechnet.	
224	
16×6	
96	
84	
12	

Antwort: 28 Arbeiter brauchen 8 Wochen $3\frac{1}{7}$ Tage.

4. In vielen Fällen giebt man an, wieviel Einheiten einer Größe 100 Einheiten einer andern Größe entsprechen, und nennt jene Anzahlen Procente (bezeichnet %).

Ein Kapital trägt 4 Proc. Zinsen heißt: 100 Thlr. Kapital tragen

in 1 Jahr (12 Monaten, 360 Tagen) 4 Thlr. Zinsen. Werden die Zinsen nicht ausgezahlt (aber auch nicht verzinst), so wächst das Kapital, und zwar

aus 100 Thlr. werden in 1 Jahr 104 Thlr.
" " " " = 2 " 108 " u. s. f.

Ein Wald wächst jährlich um 1 Proc. h.: aus 100 Klaftern werden in 1 Jahr 101, in 2 Jahren 102 u. s. f.

Eine Rechnung wird mit 4 Proc. Rabatt bezahlt h.: für 100 Thlr. Rechnung werden 96 Thlr. bar bezahlt.

Eine Geldsumme wird mit 5 Proc. jährigem Diskonto ausgezahlt h.: 100 Thlr. in 1 Jahr fällig werden sogleich mit 95 bezahlt. Beim Rabatt und Diskonto von 4 auf Hundert werden 104 Thlr. mit 100 bezahlt.

Louisd'ors geben 11 Proc. Agio h.: 100 Thlr. in Louisd'ors (zu 5 Thlr. Gold) gelten 111 Thlr. Kurant.

Eine Sorte Papiergeld steht 87 Proc. h.: 100 Thlr. in diesem Papier gelten 87 Thlr. Kurant.

An einer Ware werden 7 Proc. gewonnen h.: für 100 Thlr. Einkaufsgeld nimmt der Verkäufer 107 Thlr. ein. Werden dagegen 3 Proc. verloren, so nimmt er für 100 Thlr. Einkaufsgeld 97 Thlr. ein.

Bei einem Ballen oder Faß Ware sind 3 Proc. Tara h.: 100 Pfd. desselben (Brutto) enthalten 97 Pfd. Ware (Netto).

Atmosphärische Luft enthält dem Raum nach 21 Proc. Sauerstoff und 79 Proc. Stickstoff h.: 100 Raumeinheiten derselben bestehen aus 21 Raumeinheiten Sauerstoff und 79 Raumeinheiten Stickstoff.

Alkohol von 80 Proc. h. eine Mischung, von der 100 Raumeinheiten 80 Raumeinheiten Alkohol enthalten.

Um das Verhältnis von zwei Größen anzugeben, sagt man bisweilen, die erste ist z. B. um 36 Proc. größer (oder kleiner) als die zweite, d. h. die erste enthält sovielmal 136 (oder 64) Einheiten, als die zweite 100 Einheiten hat.

Diese Erklärungen dienen zur Bildung der Obersätze bei den hierher gehörigen Aufgaben, deren Lösung keine eigentümliche Schwierigkeit hat.

§. 7. Teilbarkeit der Zahlen*).

1. Die natürlichen Zahlen sind teils einfach (Primzahlen), teils Vielfache kleinerer Zahlen (zusammengesetzt). Eine Zahl ist durch eine andere nur dann (ohne Bruch) teilbar, wenn sie aus ihr zusammengesetzt, von ihr ein Vielfaches ist. Die Vielfachen von 2

*) Vergl. im 2ten Buche §. 13.

heißen gerade, die übrigen ungerade Zahlen. Die Primzahlen sind, mit Ausnahme der 2, sämtlich ungerade.

Um eine Tabelle der Primzahlen zu bilden*), schreibt man die ungeraden Zahlen 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, . . auf, streicht 3×3 d. i. 9 und jede darauf folgende 3te Zahl (die Vielfachen der 3), dann 5×5 d. i. 25 und jede 5te Zahl (die Vielfachen der 5), dann 7×7 d. i. 49 und jede 7te Zahl u. s. f. (die bereits gestrichenen Zahlen mitgezählt). Die ungestrichen übriggebliebenen Zahlen sind die Primzahlen.

	3	5	7	(9)	11	13	(15)	17	19
(21)	23	(25)	(27)	29	31	(33)	(35)	37	(39)
41	43	(45)	47	(49)	(51)	53	(55)	(57)	59
61	(63)	(65)	67	(69)	71	73	(75)	(77)	79
(81)	83	(85)	(87)	89	(91)	(93)	(95)	97	(99)
101	103	(105)	107	109	(111)	113	(115)	(117)	(119)
(121)	(123)	(125)	127	(129)	131	(133)	(135)	137	139
(141)	(143)	(145)	(147)	149 u. s. w.					

Um vorteilhaft rechnen zu können, hat man die Beschaffenheit der kleinern Zahlen, z. B. bis 150, sich einzuprägen. Die Primzahlen darunter sind außer 2, 3, 5, 7 folgende:

11	13	17	19	.	83	.	89
.	23	.	29	.	.	97	.
31	.	37	.	101	103	107	109
41	43	47	.	.	113	.	.
.	53	.	59	.	.	127	.
61	.	67	.	131	.	137	139
71	73	.	79	.	.	.	149

Unter den zusammengesetzten Zahlen sind zu merken:

51	3×17	98	2×49	121	11×11
52	4×13	102	6×17	123	3×41
57	3×19	104	8×13	129	3×43
68	4×17	111	3×37	133	7×19
76	4×19	112	7×16	136	8×17
78	6×13	114	6×19	138	6×23
87	3×29	116	4×29	141	3×47
91	7×13	117	9×13	143	11×13
92	4×23	119	7×17	147	3×49

2. Eine zusammengesetzte Zahl kann als Produkt von lauter Primzahlen dargestellt werden. Aus dieser Darstellung der Zahl erkennt man ihre Divisoren (im engern Sinne) d. h. die Zahlen, durch welche sie teilbar ist, welche in ihr aufgehen.

*) Sieb des Eratosthenes (κόσκινον, cribrum, 240 v. Chr.) nach der Mitteilung von Nikomachus Arithm. I, 17.

$$105 = 21 \times 5 = 3 \times 5 \times 7$$
$$72 = 8 \times 9 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

Demnach ist 105 nur teilbar durch die Primzahlen 3, 5, 7, und durch die zusammengesetzten Zahlen 3×5 d. i. 15, 3×7 d. i. 21, 5×7 d. i. 35.

72 hat die Divisoren 2, 2×2 d. i. 4, $2 \times 2 \times 2$ d. i. 8, 3, 3×3 d. i. 9, 2×3 d. i. 6, 2×9 d. i. 18, 4×3 d. i. 12, 4×9 d. i. 36, 8×3 d. i. 24.

Auch erkennt man aus der Zusammensetzung:

3	in 105 ist	5×7	d. i. 35	mal	enthalten
5	"	3×7	" 21	"	"
7	"	3×5	" 15	"	"
15 d. i. 3×5	"	7		"	"
21 " 3×7	"	5		"	"
35 " 5×7	"	3		"	"

Ist eine Zahl einzeln durch 2 und 3 teilbar, so ist sie auch durch 2×3 d. i. 6 teilbar. Ist eine Zahl durch 6 und 7 teilbar, so ist sie es auch durch 6×7 d. i. 42.

Ist dagegen eine Zahl durch 4 und 6 teilbar, welche den Divisor 2 gemein haben, so kann man nicht behaupten, daß sie durch 4×6 d. i. 24 teilbar sei. Z. B. 84 ist durch 4 und durch 6 teilbar, aber nicht durch 4×6, sondern nur durch 4×3.

Um die Beschaffenheit einer Zahl zu untersuchen, dividiert man sie durch 2, 3, 5, 7 und die folgenden Primzahlen bis zu derjenigen, welche mit sich selbst multipliciert mehr ist, als die gegebene Zahl. Z. B. 193 ist nicht durch 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 teilbar. $17 \times 17 = 289$ übersteigt bereits 193; diese Zahl kann nicht Divisoren haben, die beide größer als 17 wären, und ist folglich eine Primzahl. Dagegen

$4680 : 2 = 2340$	$4680 = 2 \times 2340$
$2340 : 2 = 1170$	$2340 = 2 \times 1170$
$1170 : 2 = 585$	$1170 = 2 \times 585$
$585 : 3 = 195$	$585 = 3 \times 195$
$195 : 3 = 65$	$195 = 3 \times 65$
	$65 = 5 \times 13$
	$4680 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 13$

3. Daß eine Zahl durch 2, 3, 5, . . . teilbar ist oder nicht, vermag man an den Resten zu erkennen, welche 10, 100, 1000, . . durch jene Zahlen dividiert übrig lassen.

a) Eine Zahl durch 2 oder 5 dividiert giebt denselben Rest, als ihre letzte Stelle, z. B. $387 = 380 + 7$. Nun ist 10 durch 2 und 5 teilbar, folglich auch 380, mithin hängt der Rest nur von der letzten Stelle 7 ab.

b) Eine Zahl durch 4 oder 25 dividiert giebt denselben Rest als die zweistellige Zahl, mit der die Zahl endigt, z. B. $1852 = 1800 + 52$. Nun ist 100 durch 4 und 25 teilbar, folglich auch 1800, mithin hängt der Rest nur von den beiden letzten Stellen 52 ab.

c) Eine Zahl durch 3 oder 9 dividiert giebt denselben Rest als ihre Quersumme, z. B. $2837 = 2000 + 800 + 30 + 7$. Nun giebt 10, 100, 1000, . . . durch 3 oder 9 dividiert den Rest 1, also 20, 200, 2000, . . . den Rest 2 u. s. f., mithin giebt die obige Zahl denselben Rest als $7 + 3 + 8 + 2$ d. i. 20, welche die Quersumme oder Ziffernsumme der Zahl heißt.

d) Eine Zahl durch 11 dividiert giebt denselben Rest als die Summe der 1ten, 3ten, 5ten, . . Ziffer weniger die Summe der 2ten, 4ten, 6ten, . . Ziffer, von rechts nach links gezählt.

Z. B. $79\,345 = 70\,000 + 300 + 5$
$+ 9000 + 40$

Nun giebt 100, 10 000, 1000 000, . . durch 11 dividiert den Rest 1, während bei 10, 1000, 100 000, . . 1 fehlt (am Aufgehen); folglich giebt 200, 20 000, 2000 000, . . den Rest 2, während bei 20, 2000, 200 000, . . . 2 fehlt, u. s. f. Also giebt die obige Zahl denselben Rest als $5 + 3 + 7 - 4 - 9$ d. i. 2.

849 023 giebt denselben Rest als $3 + 0 + 4 - 2 - 9 - 8$, oder (indem man 2×11 zulegt) als $29 - 19$, d. i. 10. Die Zahl ist durch 11 teilbar, wenn jene Differenz 0, 11, 22, . . beträgt.

Die Auffindung der Reste einer Zahl bei andern Divisionen z. B. durch 7, 13, 17, u. s. w. auf dem angezeigten Wege ist weniger einfach und deshalb praktisch weniger wichtig. Dafür aber, daß eine Zahl Primzahl ist, giebt es kein einfaches Kennzeichen.

4. Um zu untersuchen, ob zwei gegebene Zahlen, deren Zusammensetzung unbekannt ist, einen gemeinschaftlichen Divisor haben, sucht man den Rest der größern Zahl in Bezug auf die kleinere, indem man jene durch diese dividiert, den Rest der kleinern in Bezug auf den vorigen Rest, den Rest des 1ten Restes in Bezug auf den 2ten, u. s. f. bis zum Rest 0. Ist der vorletzte Rest 1, so haben die Zahlen keinen von 1 verschiedenen gemeinschaftlichen Divisor und heißen prim zu einander (relative Primzahlen). Ist aber der vorletzte Rest von 1 verschieden, so ist er der größte gemeinschaftliche Divisor der beiden gegebenen Zahlen. Z. B. 2812 und 1292:

2812	giebt	in	Bezug	auf	1292	den	Rest	228
1292	"	"	"	"	228	"	"	152
228	"	"	"	"	152	"	"	76
152	"	"	"	"	76	"	"	0

Schema:

2)	2812	1292	(5
	2584	1140	
1)	228	152	(2
	152	152	
	76	0	

Daher sind 2812 und 1292 durch 76 teilbar. Denn 76 geht auf in 152 also auch in 152 + 76 d. i. 228
" 228 × 5 d. i. 1140 " " " 1140 + 152 " 1292
" 1292 × 2 " 2584 " " " 2584 + 228 " 2812

In der That ist

2812 : 76 = 37	1292 : 76 = 17
228	76
532	532
532	532
0	0

Eine Zahl aber, welche in 2812 und 1292 aufgeht, geht auch auf in 1292 × 2 d. i. 2584, und in 2812 — 2584 d. i. 228
" 228 × 5 " 1140, " " 1292 — 1140 " 152
" " 228 — 152 " 76

und kann demnach nicht mehr als 76 betragen.

Bei den Zahlen 389 und 143 findet man als vorletzten Rest 1. Diese Zahlen haben also keinen gemeinschaftlichen Divisor, der mehr als 1 ist, und sind prim zu einander.

2)	389	143	(1
	286	103	
2)	103	40	(1
	80	23	
1)	23	17	(2
	17	12	
1)	6	5	(5
	5	5	
	1	0	

Daß man auf dem angezeigten Wege endlich den Rest 0 finden muß, ergiebt sich daraus, daß die folgenden Reste immer geringer werden.

Die größte Zahl, welche in jeder von 3 gegebenen Zahlen aufgeht, geht in dem größten gemeinschaftlichen Divisor eines Paares auf. Berechnet man also den größten gemeinschaftlichen Divisor von 2 unter den gegebenen Zahlen, und wiederum den größten gemeinschaftlichen Divisor der gefundenen Zahl und der 3ten Zahl, so ist die zuletzt gefundene Zahl der größte gemeinschaftliche Divisor der 3 gegebenen Zahlen. U. s. w.

5. Unter einem *Dividuus* einer Zahl versteht man ein Vielfaches derselben (in welchem die gegebene Zahl aufgeht). Der *kleinste gemeinschaftliche* Dividuus von 2 relativen Primzahlen ist ihr Produkt, z. B. die kleinste Zahl, in der sowohl 12 als 35 aufgeht, ist 12 × 35. Der kleinste gemeinschaftliche Dividuus der Zahlen 12 und 27, deren größter gemeinschaftlicher Divisor 3 ist, wird gefunden, indem man

12 mit dem 3ten Teil von 27 multipliciert; 4×3 und 9×3 gehen in 12×9 auf.

Die kleinste Zahl, welche durch jede von 3 gegebenen Zahlen teilbar ist, ist durch den kleinsten gemeinsamen Dividuus eines Paares teilbar. Wenn man also den kleinsten gemeinsamen Dividuus von 2 unter den gegebenen Zahlen berechnet, und wiederum den kleinsten gemeinsamen Dividuus der gefundenen Zahl und der 3ten Zahl, so hat man den kleinsten gemeinsamen Dividuus der 3 gegebenen Zahlen. U. s. w.

§. 8. Von den Brüchen.

1. Ein **Bruch** ist der Quotient des Zählers durch den Nenner; er enthält soviel gleiche Teile als der Zähler angiebt, deren soviel auf eine Einheit gehen, als der Nenner angiebt, z. B. $\frac{5}{7} = 5 : 7$ und enthält 5 solche Teile, deren 7 auf eine Einheit gehen (§. 3, 3).

2. Der Bruch heißt

echt, wenn der Zähler kleiner als der Nenner, z. B. $\frac{3}{7}$

unecht, " " " größer " " = " " $\frac{8}{7}$

Ein Bruch wie $\frac{7}{7}, \frac{14}{7}, \frac{21}{7}, \ldots$, dessen Zähler dem Nenner gleich oder ein Vielfaches desselben ist, wird ein **uneigentlicher** genannt. Ein echter Bruch ist weniger als 1, ein unechter Bruch ist mehr als 1, ein uneigentlicher Bruch ist einer ganzen Zahl gleich.

Ein unechter Bruch kann in eine ganze Zahl und einen echten Bruch (eine **gemischte Zahl**) zerlegt werden. Eine gemischte Zahl kann in einen unechten Bruch **eingerichtet** werden. Z. B.

$$\frac{3\,4\,7}{3\,6} = 347 : 36 = 9\tfrac{2\,3}{3\,6} \qquad 28\tfrac{1\,9}{3\,6}$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ \hline 23 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 84 \\ 168 \\ 19 \\ \hline = \frac{1\,0\,0\,7}{3\,6} \end{array}$$

Nämlich 1 giebt $\frac{3\,6}{3\,6}$, 28 giebt $\frac{28 \times 36}{36}$, $28\frac{19}{36}$ giebt $\frac{28 \times 36 + 19}{36}$. Eine gemischte Zahl ist wie eine mehrfach benannte Zahl anzusehen, das Einrichten entspricht dem Resolvieren, das Zerlegen dem Reducieren (§. 4, 2).

3. Ein Bruch kann ohne Änderung seines Wertes anders ausgedrückt werden, wenn man die Teile der Einheit, deren einen oder mehrere der Bruch enthält, wiederum einteilt; z. B.

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} \cdots$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} \cdots$$

$$\frac{5}{7} = \frac{10}{14} = \frac{15}{21} = \frac{20}{28} = \frac{25}{35} \cdots$$

indem man jeden der 2, 3, 7 Teile der Einheit in 2, 3, 4, 5, . . gleiche Teile teilt, wodurch Zähler und Nenner 2, 3, 4, 5, . . mal so groß werden.

Man kann also den Zähler und den Nenner eines Bruches mit derselben beliebigen Zahl multiplicieren, z. B.

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \times 7}{8 \times 7} = \frac{35}{56}$$

8tel können in 144tel verwandelt werden, weil 144 durch 8 teilbar ist; man multipliciert den Zähler und den Nenner mit 144 : 8. Dagegen können 8tel nicht genau in 108tel verwandelt werden, weil 8 in 108 nicht aufgeht.

Umgekehrt kann man auch den Zähler und den Nenner eines Bruches durch dieselbe beliebige Zahl dividieren, z. B.

$$\frac{26}{65} = \frac{26 : 13}{65 : 13} = \frac{2}{5}$$

Man kürzt den Ausdruck des Bruches, indem man seinen Zähler und Nenner durch einen gemeinschaftlichen Divisor derselben dividiert. Ist der Zähler prim zum Nenner (§. 7, 4), so hat der Bruch seinen einfachsten und anschaulichsten Ausdruck.

Da 1 Fuß = 12 Zoll = 12 × 12 d. i. 144 Linien, so sind

1 Zoll = $\frac{1}{12}$ Fuß, 1 Linie = $\frac{1}{12}$ Zoll = $\frac{1}{144}$ Fuß

3 Zoll = $\frac{3}{12}$ oder $\frac{1}{4}$ Fuß, 8 Linien = $\frac{8}{12}$ oder $\frac{2}{3}$ Zoll

7 Zoll 6 Linien = 90 Linien = $\frac{90}{144}$ d. i. $\frac{5}{8}$ Fuß, u. s. w.

$\frac{4}{7}$ kann in 12tel näherungsweise verwandelt werden, indem man beiderseits mit 12 multipliciert und (näherungsweise) durch 7 dividiert:

$$\frac{4}{7} = \frac{4 \times 12}{7 \times 12} = \frac{48 : 7}{12} = \frac{7}{12}$$ genauer als $\frac{6}{12}$ (§. 3, 4).

Man kann die Umformung der Brüche auch durch die Bemerkung erläutern, daß 7 × 9 in 5 × 9, wie 7 Thlr. in 5 Thlrn., ebensovielmal enthalten ist, als 7 in 5 (§. 3, 2), daß folglich $\frac{45}{63} = \frac{5}{7}$ ist.

Die Umformung von Brüchen durch Division kommt besonders bei der Multiplikation und Division der Brüche in Anwendung. Durch gehörige Multiplikation ihrer Nenner und Zähler werden die Brüche auf denselben Nenner gebracht, und damit zur Vergleichung, sowie zur Addition und Subtraktion geeignet.

§. 9. Addition und Subtraktion der Brüche.

1. Brüche von demselben Nenner werden addiert oder subtrahiert, indem man die Zähler addiert oder subtrahiert. Z. B. $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$, weil 2 Teile + 3 Teile, deren 7 auf eine Einheit gehen, 5 solche Teile sind.

$$2\tfrac{3}{5} + 3\tfrac{2}{5} = \tfrac{3}{5} + \tfrac{2}{5} + 2 + 3 = 6$$

$$\tfrac{9}{11} - \tfrac{4}{11} = \frac{9-4}{11} = \tfrac{5}{11}$$

$$1 - \tfrac{3}{8} = \tfrac{8}{8} - \tfrac{3}{8} = \tfrac{5}{8}$$

$6\frac{3}{7} - 4\frac{4}{7} = 1\frac{5}{7}$. Man subtrahiert $4\frac{4}{7}$ von 5 und addiert die gefundenen $\frac{3}{7}$ zu $1\frac{3}{7}$.

2. Brüche von verschiedenen Nennern werden addiert oder subtrahiert, nachdem sie auf denselben Nenner gebracht worden (§. 8, 3).

Die Brüche $\frac{3}{5}$ und $\frac{4}{7}$ erhalten beide den Nenner 5×7 d. i. 35, wenn man den Nenner und den Zähler bei dem ersten mit 7, bei dem zweiten mit 5 multipliciert (§. 8, 3). Die statt der Brüche $\frac{3}{5}$ und $\frac{4}{7}$ gefundenen $\frac{21}{35}$ und $\frac{20}{35}$ können addiert und subtrahiert werden.

Die Brüche $\frac{7}{12}$ und $\frac{3}{4}$, wovon der Nenner 4 im Nenner 12 aufgeht, brauchen nicht einen größeren Nenner als 12 zu erhalten, weil

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$$

Die Brüche $\frac{7}{12}$ und $\frac{5}{9}$, deren Nenner den gemeinschaftlichen Divisor 3 haben, brauchen nicht auf den Nenner 12×9, sondern nur auf den Nenner 12×3 d. i. 36 gebracht zu werden, indem man bei dem ersten Bruch mit 36 : 12 d. i. 3, bei dem zweiten mit 36 : 9 d. i. 4 den Nenner und den Zähler multipliciert. So erhält man statt $\frac{7}{12}$ und $\frac{5}{9}$ die gleichnamigen Brüche $\frac{21}{36}$ und $\frac{20}{36}$.

3. Der kleinste Nenner, auf welchen mehrere Brüche gebracht werden können (Generalnenner), ist der kleinste gemeinschaftliche Dividuus der einzelnen Nenner (§. 7, 4). Um denselben unmittelbar zu berechnen, läßt man die Nenner unbeachtet, welche in andern Nennern aufgehen, und multipliciert die gemeinschaftlichen Divisoren der übrigen Nenner mit den besondern Divisoren derselben. Es seien z. B. die Nenner der Brüche

18 12 15 6 24 35 10 4 21 105 56

Man streicht 12, 6, 4, weil sie in 24 aufgehen, und 15, 35, 21, weil sie in 105 aufgehen. (Eine Unterlassung in dieser Hinsicht bringt keinen Fehler.) Von den Nennern

18 24 10 105 56

haben 18, 24, 10, 56 den gemeinschaftlichen Divisor 2, und ihr gemeinschaftlicher Nenner ist 2mal so groß, als ihn die Nenner

9 12 5 105 28

erfordern. Hiervon fällt der Nenner 5 weg, weil er in 105 aufgeht. Von den Nennern

9 12 105 28

haben 12 und 28 den gemeinschaftlichen Faktor 2. Ihr Generalnenner ist 2mal so groß als der für die Nenner

9 6 105 14

erforderliche, welcher wiederum 2mal so groß ist als der, auf welchen die Nenner

9 3 105 7

gebracht werden können. Von diesen bleiben 3 und 7 unbeachtet, weil sie in 105 aufgehen. Die Nenner 9 und 105 haben aber den gemeinschaftlichen Divisor 3, und erfordern den gemeinschaftlichen Nenner $3 \times 3 \times 35$, mithin ist der gesuchte kleinste Generalnenner $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 2520$.

Schema:	18	(12)	(15)	(6)	24	(35)	10	(4)	(21)	105	56 (2
	9				12		(5)			105	28 (2
	9				6					105	14 (2
	9				(3)					105	(7) (3
	3									35	

$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 2520$

Man hebt nur einfache gemeinschaftliche Divisoren (2, 3, 5, 7, . . .) in aufsteigender Ordnung aus, um nicht möglicherweise durch unnötige Faktoren den Generalnenner zu vergrößern.

Um für die einzelnen Brüche die Zahlen zu finden, mit denen die Zähler wie die Nenner zu multiplicieren sind, kann man die §. 7, 2 gemachten Bemerkungen benutzen.

18	d. i.	$2\times3\times3$	in 2520	ist	$2\times2\times5\times7$	d. i.	140	mal	enth.
12	= =	$2\times2\times3$	= =	=	$2\times3\times5\times7$	= =	210	=	=
15	= =	3×5	= =	=	$2\times2\times2\times3\times7$	= =	168	=	=
6	= =	2×3	= =	=	$2\times2\times3\times5\times7$	= =	420	=	=
24	= =	$2\times2\times2\times3$	= =	=	$3\times5\times7$	= =	105	=	=
35	= =	5×7	= =	=	$2\times2\times2\times3\times3$	= =	72	=	=
10	= =	2×5	= =	=	$2\times2\times3\times3\times7$	= =	252	=	=
4	= =	2×2	= =	=	$2\times3\times3\times5\times7$	= =	630	=	=
21	= =	3×7	= =	=	$2\times2\times2\times3\times5$	= =	120	=	=
105	= =	$3\times5\times7$	= =	=	$2\times2\times2\times3$	= =	24	=	=
56	= =	$2\times2\times2\times7$	= =	=	$3\times3\times5$	= =	45	=	=

Beispiel.

$15\frac{13}{21}$	52	$\overset{22}{676}$
$+13\frac{37}{39}$	28	1036
$+28\frac{19}{52}$	21	399
$+35\frac{7}{12}$	91	637
$\overset{22}{}$		2748 : 1092
		2184

93 . . . . . $\frac{564}{1092}$ od. $\frac{47}{91}$

21	39	52	12	(2
21	39	26	6	(2
21	39	(13)	(3)	(3
7	13			

$2\times2\times3\times7\times13=1092$

1092 : 21=52, $13\times52=676$
= 39=28, $37\times28=1036$
= 52=21, $19\times21=399$
= 12=91, $7\times91=637$

$$\frac{13}{21} = \frac{13 \,.\, 52}{21 \,.\, 52} = \frac{676}{1092} \text{ u. s. w.}$$

$\frac{2748}{1092} = 2\frac{564}{1092}$, welcher Bruch verkürzt werden kann, indem beiderseits durch 4 und durch 3, also durch 12 dividiert wird.

Oder: $15\frac{13}{21}|4|52:84$ $13\frac{37}{39}|4|148:156$ $51\frac{17}{84}|13|221:1092$

$+\ 35\frac{7}{12}|7|49$ $+\ 28\frac{19}{52}|3|57$ $+\ 42\frac{49}{156}|7|343$

101 205 $93\ldots\frac{564}{1092}$ od. $\frac{47}{91}$

84 156

$51\ldots\frac{17}{84}$ $42\ldots\frac{49}{156}$

$93\frac{47}{91}|3|141:273$ $77\frac{245}{273}|245:273$ $63\frac{37}{39}|4|148:158$

$-\ 15\frac{13}{21}|13|169$ $-\ 13\frac{37}{39}|7|259$ $-\ 28\frac{19}{52}|3|57$

$77\ldots\frac{245}{273}$ $63\ldots\frac{259}{273}$ od. $\frac{37}{39}$ $35\ldots\frac{91}{156}$ od. $\frac{7}{12}$

Man subtrahiert $\frac{168}{273}$ von 1 d. i. $\frac{273}{273}$, und addiert die Differenz zu $\frac{141}{273}$, u. s. w.

§. 10. Multiplikation und Division eines Bruches durch ganze Zahlen.

1. Um einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multiplicieren, multipliciert man den Zähler; z. B. $\frac{3}{4} \times 5 = \frac{3 \times 5}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$. Denn 3 Teile, deren 4 auf eine Einheit gehen, 5mal genommen, sind 3×5 solche Teile. Oder: den 4ten Teil von 3 erhält man 5mal, indem man den 4ten Teil von 3×5 nimmt.

Der zu berechnende Bruch ist vor der Berechnung soviel als möglich zu verkürzen (§. 8, 3), z. B.

$$\frac{3}{8} \times 12 = \frac{3 \times 12}{8} = \frac{3 \times 3}{2} = 4\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4} \times 8 = \frac{3 \times 8}{4} = 3 \times 2 = 6$$

$\frac{3}{8} \times 8 = 3$, d. h. Bruch $\times$ Nenner = Zähler, weil der Bruch der Quotient des Zählers durch den Nenner ist, und Quotient $\times$ Divisor = Dividendus (§. 3, 1).

Um eine gemischte Zahl zu multiplicieren, multipliciert man entweder den Bruch und die ganze Zahl und addiert die Produkte, oder man richtet die gemischte Zahl ein und verfährt wie oben.

z. B. $86\frac{9}{26} \times 48$ oder $86\frac{9}{26} \times 48$

$16\ \ 216:13$ 172

$688\ \ 86$ 516

$344\ \ \frac{8}{13}$ 9

4144 $\frac{2245 \times 48}{26} = \frac{2245 \times 24}{13}$

4490

8980

$53880 : 13 = 4144\frac{8}{13}$

18

58

60

8

Ebenso bei mehrfach benannten Zahlen.

2. Um einen Bruch durch eine ganze Zahl zu **dividieren**, multipliciert man den Nenner; z. B.

$$\tfrac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4 \times 5} = \tfrac{3}{20} \text{ (zu lesen: „3 durch 4mal 5“)}$$

Teilt man die 4tel einer Einheit in je 5 gleiche Teile, mithin die Einheit in 4×5 d. i. 20 Teile, so erhält man $\frac{1}{20}$ als 5ten Teil von $\frac{1}{4}$, und $\frac{3}{20}$ als 5ten Teil von $\frac{3}{4}$. In der That giebt der Quotient $\frac{3}{4 \times 5}$ oder $\frac{3}{20}$, multipliciert mit dem Divisor 5, den Dividendus $\frac{3}{4}$ (§. 3, 1).

Der zu berechnende Bruch ist vor der Berechnung soviel als möglich zu verkürzen, z. B.

$$\tfrac{25}{28} : 15 = \frac{25}{28 \times 15} = \frac{5}{28 \times 3} = \tfrac{5}{84}$$

$$\tfrac{25}{28} : 25 = \tfrac{1}{28}, \qquad \tfrac{25}{28} : 5 = \tfrac{5}{28}$$

Man kann den Zähler sofort dividieren, wenn kein Rest bleibt.

Um eine gemischte Zahl zu dividieren, dividiert man die ganze Zahl, wenn sie größer ist als der Divisor, richtet die als Rest verbliebene gemischte Zahl ein und verfährt wie vorher. Man kann auch die gegebene gemischte Zahl einrichten und wie oben verfahren.

z. B. $826\frac{5}{8} : 17 = 48\frac{5}{8}$

$$\begin{array}{r} 68 \\ \hline 146 \\ 136 \\ \hline 10\frac{5}{8} \end{array} \qquad 10\tfrac{5}{8} : 17 = \frac{85}{8 \times 17}$$

oder:

$$\frac{826\frac{5}{8}' : 17}{\frac{6613}{8 \times 17}} = {}^{3}\tfrac{8}{8}{}^{9} = 48\tfrac{5}{8}$$

$52\frac{2}{4}\frac{6}{5} : 39 = 4\frac{2}{4}\frac{6}{5} : 3$, indem man beide Teile der gemischten Zahl und den Divisor durch 13 dividiert.

Um 18 Sgr. $7\frac{1}{5}$ Pf. auf einen Thalerbruch zu reducieren, sagt man zunächst: $7\frac{1}{5}$ Pf. $= 7\frac{1}{5} : 12$ Sgr. $= \frac{3}{5}$ Sgr. Dann $18\frac{3}{5}$ Sgr. $= 18\frac{3}{5} : 30$ Thlr. $= \frac{3}{50}$ Thlr. Um $\frac{25}{36}$ Thaler zu resolvieren, sagt man nun kürzer als §. 4 gezeigt wurde:

$\frac{25}{36}$ Thlr. $= \frac{25}{36} \times 30$ Sgr. $= {}^{1}\tfrac{25}{6}$ d. i. $20\frac{5}{6}$ Sgr., und $\frac{5}{6}$ Sgr. $= \frac{5}{6} \times 12$ Pf. $= 10$ Pf., daher $\frac{25}{36}$ Thlr. $= 20$ Sgr. 10 Pf.

§. 11. Multiplikation und Division durch einen Bruch.

1. Anstatt des ausführlichern Ausdrucks „den 4ten Teil einer Größe 3mal nehmen“ gebraucht man den kürzern „$\frac{3}{4}$ (von) der Größe nehmen“ oder „die Größe $\frac{3}{4}$mal nehmen“, obgleich ein Multiplikator

ursprünglich nur eine ganze Zahl sein kann (§. 2, 3). Z. B. $\frac{3}{4}$ von 5 Ctr. sind $\frac{3 \times 5}{4}$ d. i. $3\frac{3}{4}$ Ctr. Bei dem Ausdruck „$\frac{3}{4}$ von 5 Ctr." ist nicht an Subtrahieren von einem Minuendus zu denken. Bestimmter sagt man: $\frac{3}{4}$mal 5 Ctr.

Mit einem Bruche multiplicieren ist daher: durch den Nenner dividieren, und den Quotienten mit dem Zähler multiplicieren; oder mit dem Zähler multiplicieren, und das Produkt durch den Nenner dividieren. Z. B. Um eine Größe mit $\frac{3}{4}$ zu multiplicieren, kann man entweder die Größe durch 4 dividieren und den Quotienten mit 3 multiplicieren, oder die Größe mit 3 multiplicieren und das Produkt durch 4 dividieren. Denn der 4te Teil der 3fachen Größe ist 3mal so groß als der 4te Teil der einfachen Größe.

Um die jährlichen Zinsen eines Kapitals zu 4 Procent zu berechnen, hat man, weil 100 Thlr. Kapital 4 Thlr. Zinsen geben, mithin 1 Thlr. Kapital $\frac{4}{100}$ Thlr. Zinsen (§. 6), das Kapital mit $\frac{4}{100}$, bei 5 Proc. mit $\frac{5}{100}$, bei $3\frac{1}{2}$ Proc. mit $3\frac{1}{2} : 100$ d. i. $\frac{7}{200}$ zu multiplicieren. Der Ausdruck Procent vertritt den Nenner 100.

2. Um einen Bruch mit einem Bruch zu multiplicieren, multipliciert man den Zähler mit dem Zähler und den Nenner mit dem Nenner. Z. B.

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{3 \times 5}{4 \times 7} = \frac{15}{28}$$

Denn $\frac{3}{4} : 7$ oder $\frac{3}{4 \times 7}$ mit 5 multipliciert giebt $\frac{3 \times 5}{4 \times 7}$ (zu lesen: „3mal 5 durch 4mal 7"). Oder $\frac{3}{4} \times 5$ d. i. $\frac{3 \times 5}{4}$ durch 7 dividiert giebt $\frac{3 \times 5}{4 \times 7}$ wie vorhin.

$$\frac{12}{25} \times \frac{15}{16} = \frac{12 \times 15}{25 \times 16} = \frac{3 \times 3}{5 \times 4} = \frac{9}{20}$$

$$\frac{7}{12} \times \frac{4}{21} = \frac{7 \times 4}{12 \times 21} = \frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1 \times 2 \times 3}{2 \times 3 \times 4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{7}{90} \times \frac{8}{21} \times \frac{3}{8} \times 20 = \frac{7 \times 8 \times 3 \times 20}{90 \times 21 \times 8} = \frac{2}{9}$$

Um mit einer gemischten Zahl zu multiplicieren, multipliciert man entweder mit dem Bruch und mit der ganzen Zahl und addiert die Produkte, oder man richtet die gemischte Zahl ein und multipliciert mit dem unechten Bruche.

$$\text{Z. B. } 45\tfrac{3}{4} \times 17\tfrac{2}{3} = \tfrac{3}{4} \times \tfrac{2}{3} \mid \tfrac{1}{2}$$
$$45 \times \tfrac{2}{3} \mid 30$$
$$\tfrac{3}{4} \times 17 \mid 12\tfrac{3}{4}$$
$$45 \times 17 \mid 315$$
$$45$$
$$= 808\tfrac{1}{4}$$

$$\text{Oder: } 45\tfrac{3}{4} \times 17\tfrac{2}{3} = \frac{183 \times 53}{4 \times 3} = \frac{61 \times 53 : 4}{53}$$
$$318$$
$$3233 : 4 = 808\tfrac{1}{4}$$

$$2\tfrac{1}{12} \times 3\tfrac{2}{5} \times 2\tfrac{1}{4} \times 3\tfrac{1}{17} = \frac{35 \times 17 \times 9 \times 52}{12 \times 5 \times 4 \times 17} = \frac{7 \times 3 \times 13}{4} = 68\tfrac{1}{4}$$

3. Um durch einen Bruch zu dividieren, multipliciert man mit dem umgekehrten (reciproken) Bruch; z. B.

$$3 : \tfrac{4}{5} = 3 \times \tfrac{5}{4} = \frac{3 \times 5}{4} = 3\tfrac{3}{4}$$

Die Aufgabe, 3 durch $\frac{4}{5}$ zu dividieren, entspringt zunächst daraus, daß man das Verhältnis von 3 zu $\frac{4}{5}$ sucht, d. h. fragt, wievielmal $\frac{4}{5}$ in 3 enthalten ist. Nun ist $3 = \frac{3 \times 5}{5}$ und $\frac{4}{5}$ in $\frac{3 \times 5}{5}$ sovielmal enthalten als 4 in 3×5, nämlich $\frac{3 \times 5}{4}$mal. Es entsteht aber $\frac{3 \times 5}{4}$ dadurch aus 3, daß man mit dem Bruche $\frac{5}{4}$ multipliciert, welcher durch Umkehrung des Bruches $\frac{4}{5}$ gebildet ist.

Zu demselben Ziele führt die Überlegung: $\frac{1}{5}$ in 1 ist 5mal, $\frac{4}{5}$ in 1 ist den 4ten Teil soviel d. i. $\frac{5}{4}$mal, $\frac{4}{5}$ in 3 ist 3mal soviel d. i. $\frac{5 \times 3}{4}$mal enthalten u. s. w.

Die Richtigkeit des Quotienten $3 \times \frac{5}{4}$ bestätigt sich, indem er mit dem Divisor $\frac{4}{5}$ multipliciert den Dividendus 3 giebt (§. 3, 1).

Ebenso ist $3\tfrac{2}{7} : \tfrac{4}{5} = 3\tfrac{2}{7} \times \tfrac{5}{4} = \frac{23 \times 5}{7 \times 4} = \frac{115}{28} = 4\tfrac{3}{28}$, weil $3\tfrac{2}{7} \times \tfrac{5}{4} \times \tfrac{4}{5} = 3\tfrac{2}{7}$. (Um den Quotienten auf dem andern Wege zu finden, müßte man die Brüche auf denselben Nenner bringen.)

$$3\tfrac{2}{7} : \tfrac{1}{5} = 3\tfrac{2}{7} \times 5, \quad 1 : \tfrac{1}{5} = 5, \quad 1 : \tfrac{2}{5} = \tfrac{5}{2}, \text{ u. s. w.}$$

4. Um durch eine gemischte Zahl zu dividieren, muß man sie einrichten und mit dem umgekehrten Bruch multiplicieren. Z. B.

$$3 : 5\tfrac{7}{8} = 3 : \tfrac{47}{8} = 3 \times \tfrac{8}{47} = \tfrac{24}{47}$$
$$3\tfrac{5}{7} : 5\tfrac{7}{8} = \frac{26 \times 8}{7 \times 47} = \tfrac{208}{329}$$

Es ist $3 : 5\frac{7}{8}$ weniger als $3 : 5$, weil der Divisor $5\frac{7}{8}$ mehr als 5 ist. Mit den Teilen des gemischten Divisors kann nicht ohne weiteres gerechnet werden.

Die Aufgabe: 7 Thlr. 13 Sgr. durch $2\frac{5}{8}$ zu dividieren, den Quotienten mit $5\frac{1}{3}$ zu multiplicieren, das Produkt durch $5\frac{2}{5}$ zu dividieren und den Quotienten mit $1\frac{4}{5}$ zu multiplicieren, — wird nach §. 10 bezeichnet

$$\frac{7 \text{ Thlr. } 13 \text{ Sgr.} \times 5\frac{1}{3} \times 1\frac{4}{5}}{2\frac{5}{8} \times 5\frac{2}{5}}$$

und giebt nach Anwendung der vorstehenden Regeln

$$\frac{7 \text{ Thlr. } 13 \text{ Sgr.} \times 6 \times 16 \times 5 \times 9}{17 \times 3 \times 27 \times 5}$$

oder verkürzt

$$\frac{7 \text{ Thlr. } 13 \text{ Sgr.} \times 2 \times 16}{17 \times 3} = 7 \text{ Thlr. } 13 \text{ Sgr.} \times \tfrac{32}{51}$$

Der Ausdruck „durch einen Bruch dividieren" ist nicht weniger künstlich, als der Ausdruck „mit einem Bruche multiplicieren", wenn der Quotient einen Teil des Dividendus bedeuten soll. Der Ausdruck „eine Größe durch $\frac{4}{7}$ dividieren" oder „den $\frac{1}{4}$ten Teil der Größe nehmen" ist aber gleichberechtigt und nach dem obigen gleichbedeutend mit dem Ausdrucke „die Größe $\frac{1}{4}$mal nehmen" (§. 3, 3). Daß eine Zahl durch einen echten Bruch dividiert größer wird, ist ebensowenig befremdlich, als daß sie mit einem echten Bruch multipliciert kleiner wird.

§. 12. Einfache und zusammengesetzte Regel de tri mit Brüchen.

1. Die in §. 5 aufgestellten Sätze behalten ihre Geltung, wenn man statt der dort vorkommenden ganzen Zahlen Brüche oder gemischte Zahlen einführt.

Z. B. $\frac{1}{7}$ Pfd. kostet den 7ten Teil soviel als 1 Pfd., und $\frac{4}{7}$ Pfd. kosten 4mal den 7ten Teil soviel als 1 Pfd., wofür nach §. 11, 1 gesagt wird:

$\frac{4}{7}$ Pfd. kosten $\frac{1}{4}$mal soviel als 1 Pfd.

ebenso wie man sagt:

5 Pfd. kosten 5mal soviel als 1 Pfd.

Ferner kostet 1 Pfd. 9mal soviel als $\frac{1}{3}$ Pfd., 5 Pfd. 9mal soviel als $\frac{5}{3}$ Pfd., daher kostet 1 Pfd. 9mal den 5ten Teil soviel d. i. $\frac{9}{5}$mal soviel als $\frac{5}{3}$ Pfd. Mit $\frac{9}{5}$ multiplicieren ist aber dasselbe, als durch $\frac{5}{9}$ dividieren oder den $\frac{5}{9}$ten Teil nehmen (§. 11, 4); daher kann man den Satz

1 Pfd. kostet $\frac{9}{5}$ mal soviel als $\frac{5}{3}$ Pfd.

auch wie folgt aussprechen:

1 Pfd. kostet den $\frac{5}{9}$ten Teil soviel als $\frac{5}{3}$ Pfd.

ebenso wie man bei ganzen Zahlen sagt:

1 Pfd. kostet den 6ten Teil soviel als 6 Pfd.

Die einzelnen Sätze der Regel de tri (§. 6) lassen sich daher mit Brüchen genau ebenso aufstellen, als mit ganzen Zahlen.

Aufgabe.

$9\frac{3}{5}$ Ctr. Ware kosten 472 Thlr. 20 Sgr., wieviel werden $34\frac{2}{7}$ Ctr. kosten?

Aufl. $9\frac{3}{5}$ Ctr. kosten 472 Thlr. 20 Sgr.
1 Ctr. kostet den $9\frac{3}{5}$ten Teil soviel d. i.

$$\frac{472 \text{ Thlr. } 20 \text{ Sgr.}}{9\frac{3}{5}}$$

$34\frac{2}{7}$ Ctr. kosten $34\frac{2}{7}$mal soviel d. i.

$$\frac{472 \text{ Thlr. } 20 \text{ Sgr.} \times 34\frac{2}{7}}{9\frac{3}{5}}$$

Ausr. $\dfrac{472 \text{ Thlr. } 20 \text{ Sgr.} \times 240 \times 5}{7 \times 48} = \dfrac{118 \text{ Thlr. } 5 \text{ Sgr.} \times 100}{7}$

$= 11\,816$ Thlr. 20 Sgr. : $7 = 1688$ Thlr. $2\frac{2}{7}$ Sgr.

Antw. $34\frac{2}{7}$ Ctr. kosten 1688 Thlr. $2\frac{2}{7}$ Sgr.

Aufgabe.

Ein Forst ist 17 Jahre lang um $1\frac{3}{4}$ Proc. seines anfänglichen Bestandes jährlich gewachsen und hält 16 608 Klaftern. Wie groß war der anfängliche Bestand?

Aufl. Aus 100 Klaftern wurden in 1 Jahr $100 + 1\frac{3}{4}$, in 2 Jahren $100 + 1\frac{3}{4} \times 2$, in 17 Jahren $100 + 1\frac{3}{4} \times 17$ d. i. $129\frac{3}{4}$ Klaftern. Weil nach dem anfänglichen Bestand gefragt ist, so sagt man:

$129\frac{3}{4}$ Klaftern sind aus 100 Klaftern entstanden,

$$1 \quad " \quad " \quad " \quad \frac{100 \text{ Kl.}}{129\frac{3}{4}} \quad "$$

$$16\,608 \quad " \quad " \quad " \quad \frac{100 \text{ Kl.} \times 16\,608}{129\frac{3}{4}} \quad "$$

Ausr. $\dfrac{100 \text{ Kl.} \times 16\,608 \times 4}{519} = 100 \text{ Kl.} \times 32 \times 4 = 12\,800$ Kl.

Antw. Der anfängliche Bestand war 12 800 Klaftern.

Aufgabe.

Als der Scheffel Korn $4\frac{1}{4}$ Thlr. kostete, erhielt man für 10 Sgr. $7\frac{1}{2}$ Pfd. Brod; wieviel erhält man, wenn der Scheffel $3\frac{1}{3}$ Thlr. kostet?

Aufl. Bei $4\frac{3}{4}$ Thlr. Kornpreis erhielt man $7\frac{1}{2}$ Pfd. Brod
" 1 " " " " $7\frac{1}{2}$ Pfd. $\times 4\frac{3}{4}$
" $3\frac{1}{3}$ " " " " $\frac{7\frac{1}{2}\text{ Pfd.} \times 4\frac{3}{4}}{3\frac{1}{3}}$

Ausr. $\frac{15\text{ Pfd.} \times 19 \times 3}{2 \times 4 \times 10} = 10$ Pfd. 22 Lot.

Antw. Wenn der Scheffel Korn $3\frac{1}{3}$ Thlr. kostet, so erhält man für 10 Sgr. 10 Pfd. 22 Lot Brod.

Aufgabe.

Ein Ochs auf der Weide an einem $7\frac{1}{2}$ Fuß langen Seile frißt in 2 Tagen das Gras ab, welches er erreichen kann. Wieviel Tage kommt er aus, wenn das Seil $13\frac{3}{4}$ Fuß lang ist?

Auflösung.

Wenn das Seil $7\frac{1}{2}$ Fuß lang, so reicht der Ochs 2 Tage
" " " 1 " " " " " " " $\frac{2\text{ Tage}}{7\frac{1}{2} \times 7\frac{1}{2}}$
" = " $13\frac{3}{4}$ " " " " " " " $\frac{2\text{ Tage} \times 13\frac{3}{4} \times 13\frac{3}{4}}{7\frac{1}{2} \times 7\frac{1}{2}}$

Denn der Kreis von 2 Fuß Radius hat 2×2mal soviel Fläche als der Kreis von 1 Fuß Radius, u. s. w. (§. 5, 4).

Ausr. $\frac{2\text{ T.} \times 55 \times 55 \times 2 \times 2}{4 \times 4 \times 15 \times 15} = \frac{11 \times 11}{2 \times 3 \times 3} = 6\frac{1}{18}$ Tage.

Antw. Wenn das Seil $13\frac{3}{4}$ Fuß lang ist, so hat der Ochs $6\frac{1}{18}$ d. i. fast 7 Tage zu fressen.

Aufgabe.

$3\frac{3}{8}$ Quart füllen einen Würfel von 6 Zoll Länge. Wieviel faßt ein Würfel von 4 Fuß 4 Zoll Länge?

Aufl. Der Würfel von 6 Zoll Länge faßt $3\frac{3}{8}$ Quart
" " " 1 " " " $\frac{3\frac{3}{8}\text{ Quart}}{6 \times 6 \times 6}$
" " " 52 " " " $\frac{3\frac{3}{8}\text{ Qu.} \times 52 \times 52 \times 52}{6 \times 6 \times 6}$

Ausr. $\frac{27 \times 52 \times 52 \times 52}{8 \times 6 \times 6 \times 6} = 13 \times 13 \times 13 = 2197$.

Antw. Ein Würfel von 4 Fuß 4 Zoll Länge faßt 2197 Quart.

2. Aufgaben, deren Lösung mehrfache Anwendung der Regel de tri erfordert, heißen Aufgaben der zusammengesetzten Regel de tri (Regula quinque, septem, u. s. w., Kettenregel).

Aufgabe.

Wenn 5 Ctr. für $2\frac{1}{2}$ Thlr. 14 Meilen weit geschafft werden, wieviel zahlt man für 21 Ctr. 25 Meilen weit?

Aufl. Für 5 Ctr. zahlt man $2\frac{1}{2}$ Thlr., und bei gleicher Entfernung für 1 Ctr. den 5ten Teil, für 21 Ctr. 21mal soviel, d. i.

$$\frac{2\frac{1}{2}\text{ Thlr.} \times 21}{5}$$

Diese Last 1 Meile weit zu schaffen kostet den 14ten Teil, 25 Meilen weit 25mal soviel, also

$$\frac{2\frac{1}{2}\text{ Thlr.} \times 21 \times 25}{5 \times 14}$$

Ausr. $\frac{5 \times 21 \times 25}{2 \times 5 \times 14} = \frac{75}{4} = 18\frac{3}{4}$

Antw. 21 Ctr. 25 Meilen weit kosten $18\frac{3}{4}$ Thlr.

Aufgabe.

Zu wieviel Procent war das Kapital 6300 Thlr. ausgeliehen, wenn es in 20 Jahren 5670 Thlr. Zinsen getragen hat?

Aufl. 6300 Thlr. trugen in 20 Jahren 5670 Thlr. Zinsen, in 1 Jahr den 20ten Teil soviel; 1 Thlr. trug den 6300ten Teil, 100 Thlr. 100mal soviel, d. i.

$$\frac{5670\text{ Thlr.} \times 100}{20 \times 6300}\text{ Zinsen.}$$

Ausr. $\frac{567}{2 \times 63} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$

Antw. Das Kapital 6300 Thlr. stand zu $4\frac{1}{2}$ Proc. Zinsen aus.

Aufgabe.

Einen Kanal 735′ lang, 10′ tief, 21′ breit zu graben, brauchen 140 Arbeiter, welche täglich $7\frac{1}{2}$ Stunde arbeiten, 546 Tage. Wie lang wird ein 15′ tiefer, 25′ breiter Kanal, welchen in 324 Tagen, $8\frac{1}{3}$ Stunde täglich, 182 Arbeiter graben?

Aufl. Wenn der Kanal 1′ statt 10′ tief ist, so wird er, unter sonst gleichen Umständen, 10mal so lang; wenn er 15′ statt 1′ tief ist, wird er den 15ten Teil so lang.

Wenn der Kanal 1′ statt 21′ breit ist, so wird er 21mal so lang; wenn er 25′ statt 1′ breit ist, wird er den 25ten Teil so lang.

Wenn nicht 140, sondern 182 Arbeiter daran graben, so wird er den 140ten Teil 182mal so lang.

Wenn die Arbeiter nicht 546, sondern 324 Tage graben, so wird er den 546ten Teil 324mal so lang.

Wenn die Arbeiter täglich nicht $7\frac{1}{2}$, sondern $8\frac{1}{3}$ Stunde arbeiten, so wird er den $7\frac{1}{2}$ten Teil $8\frac{1}{3}$mal so lang. Also wird der Kanal

$$\frac{735' \times 10 \times 21 \times 182 \times 324 \times 8\frac{1}{3}}{15 \times 25 \times 140 \times 546 \times 7\frac{1}{2}} \text{ lang.}$$

Ausr. $\frac{735 \times 10 \times 21 \times 182 \times 324 \times 25 \times 2}{15 \times 25 \times 140 \times 546 \times 3 \times 15} = 352\frac{4}{5}$

Antw. Dieser Kanal wird $352\frac{4}{5}$ Fuß lang.

Aufgabe.

Wieviel preuß. Fuß sind 139 par. Fuß, da 15′ par. = 16′ engl., 28′ engl. = 27′ östr., 139′ östr. = 140′ preuß.?

Aufl. Da 1′ par. = $\frac{16}{15}$′ engl., so verwandelt man par. Fuß in engl. Fuß, indem man mit $\frac{16}{15}$ multipliciert, u. s. w. Folglich

$$139' \text{ par.} = \frac{139' \times 16}{15} \text{ engl.} = \frac{139' \times 16 \times 27}{15 \times 28} \text{ östr.}$$

$$= \frac{139' \times 16 \times 27 \times 140}{15 \times 28 \times 139} \text{ preuß.}$$

Ausr. $\frac{139 \times 16 \times 27 \times 140}{15 \times 28 \times 139} = 16 \times 9 = 144$

Antw. 139′ par. = 144′ preuß.

Aufgabe.

Wie teuer wird 1 leipziger Pfund Ware verkauft, von der 1 hamburger Pfund $6\frac{1}{4}$ Mark Kurant kostet, wenn die Versendung 5 Proc. Unkosten gemacht hat und 8 Proc. Gewinn genommen werden? (1 Mark Kur. = $\frac{2}{3}$ Thlr., 100 Pfd. hamb. = $103\frac{1}{2}$ Pfd. leipz.)

Aufl. 1 hamb. Pfd. kostet in Hamburg $\frac{2}{3}$ Thlr., in Leipzig bei 5 Proc. Unkosten $\frac{105}{100}$mal soviel; 1 leipz. Pfd. kostet $\frac{100}{103\frac{1}{2}}$mal soviel, und mit 8 Proc. Gewinn verkauft $\frac{108}{100}$mal soviel, also

$$\frac{5 \text{ Thlr.} \times 105 \times 100 \times 108}{2 \times 100 \times 103\frac{1}{2} \times 100}$$

Ausr. $\frac{5 \times 105 \times 108}{207 \times 100} = \frac{7 \times 9}{23}$ Thlr. = 2 Thlr. 22 Ngr. $1\frac{17}{23}$ Pf.

Antw. Ein leipz. Pfund dieser Ware wird für 2 Thlr. 22 Ngr. $1\frac{17}{23}$ Pf. verkauft.

Aufgabe.

Es soll in Leipzig ein Wechsel von 1000 Dukaten auf Amsterdam gekauft werden. Der Amsterdamer Kurs in Leipzig ist $143\frac{1}{2}$ (Thaler für 250 holl. Gulden des Wechsels). Der Dukaten gilt in Amsterdam

5 Gulden 68 Centimes (1 Gulden = 100 Cent.). Der Wechsler erhält $\frac{1}{8}$ Proc. nebſt 1 Promille ($\frac{1}{1000}$) Maklergebühr (Courtage). Wieviel koſtet der Wechſel?

Aufl. 1000 Duk. $= 1000 \times 5\frac{68}{100}$ Gulden

$$= \frac{1000 \times 5\frac{68}{100} \times 143\frac{1}{2}}{250} \text{ Thlr.}$$

mit $\frac{13}{30}$ Proc. Unkoſten

$$= \frac{1000 \times 5\frac{68}{100} \times 143\frac{1}{2} \times 100\frac{13}{30}}{250 \times 100} \text{ Thlr.}$$

Au'sr. $\frac{1000 \times 568 \times 287 \times 3013}{250 \times 100 \times 100 \times 2 \times 30} = 3274\frac{13}{30}\frac{44}{000}\frac{16}{000}$

Antw. Der Wechſel koſtet 3274 Thlr. 13 Ngr. 5 Pf.

§. 13. Teilung nach gegebenen Verhältniſſen.

1. Wenn die gleichartigen Größen A, B, C, . . eine gewiſſe Größe (Einheit) der Reihe nach 2, 3, 5, . . mal enthalten, ſo verhalten ſie ſich zu einander der Reihe nach wie die Zahlen 2, 3, 5, . . d. h. das Verhältnis A : B iſt 2 : 3, das Verhältnis A : C iſt 2 : 5, das Verhältnis C : B iſt 5 : 3, u. ſ. f. (§. 3, 2). Man vereinigt dieſe Angaben in dem Ausdruck

$$A : B : C = 2 : 3 : 5$$

welcher eine Proportion*) genannt wird. Aus der Proportion erkennt man nicht nur, daß

$$A = \tfrac{2}{3} B, \quad A = \tfrac{2}{5} C,$$
$$B = \tfrac{3}{2} A, \quad B = \tfrac{3}{5} C, \text{ u. ſ. w.}$$

ſondern auch, daß

$$\tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{3} B = \tfrac{1}{5} C$$

und nach Multiplikation mit 2 . 3 . 5

$$15 A = 10 B = 6 C$$

Denn nach der Vorausſetzung betragen $\frac{1}{2}$ A, $\frac{1}{3}$ B, $\frac{1}{5}$ C je 1 Einheit.

2. Die Zahlen einer Proportion können ſämtlich mit derſelben Zahl multipliciert oder durch dieſelbe Zahl dividiert werden, weil dadurch ihre Verhältniſſe zu einander nicht verändert werden (§. 8, 3).

Wenn z. B.

$$A : B : C = \tfrac{2}{3} : \tfrac{3}{4} : \tfrac{5}{9}$$

ſo findet man

$$A : B : C = 24 : 27 : 20$$

indem man $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{9}$ mit dem Generalnenner 36 multipliciert.

*) Vergl. 3tes Buch §. 1.

Wenn ferner

$$D : E : F = 21 : 28 : 35$$

so findet man

$$D : E : F = 3 : 4 : 5$$

indem man 21, 28, 35 durch ihren gemeinschaftlichen Divisor 7 dividiert.

3. Wenn A und B die Teile eines Ganzen sind und zu einander wie 2 und 3 sich verhalten, so hat das Ganze 2 + 3 d. i. 5 Einheiten, deren 2 auf A, 3 auf B kommen. Aus der Proportion der Teile

$$A : B = 2 : 3$$

erkennt man also, daß $A = \frac{2}{5}$ des Ganzen, $B = \frac{3}{5}$ des Ganzen ist.

Wenn A, B, C die Teile eines Ganzen sind und zu einander wie 2, 3, 5 sich verhalten, so hat das Ganze 2 + 3 + 5 d. i. 10 Einheiten, deren 2 auf A, 3 auf B, 5 auf C kommen. Aus der Proportion der Teile

$$A : B : C = 2 : 3 : 5$$

folgt also, daß $A = \frac{2}{10}$ des Ganzen, $B = \frac{3}{10}$ des Ganzen, $C = \frac{5}{10}$ des Ganzen ist.

4. Gesellschaftsrechnung heißt die Teilung einer Größe nach gegebenen Verhältnissen d. i. in ungleiche Teile, deren Verhältnisse zu einander gegeben sind. Soll z. B. die Größe M nach den Verhältnissen 3 : 4 : 5 in die Teile A, B, C geteilt werden, so schließt man aus der Proportion der Teile

$$A : B : C = 3 : 4 : 5$$

daß A eine gewisse Größe (Einheit) 3mal, B dieselbe Größe 4mal, C dieselbe 5mal, also M dieselbe 3 + 4 + 5 d. i. 12mal enthält. Daher teilt man M in 12 gleiche Teile und nimmt deren 3 für A, 4 für B, 5 für C.

Bei den Aufgaben der Gesellschaftsrechnung kommt in Betracht 1) die zu teilende Größe, 2) die Proportion der Teile, 3) die Summe der Zahlen der Proportion, 4) Division der zu teilenden Größe durch die Summe, 5) Multiplikation des Quotienten mit den einzelnen Zahlen der Proportion.

Aufgabe.

9728 Thlr. sollen unter drei Brüder nach Verhältnis ihres Alters (36, 24, 16 Jahr) geteilt werden. Wieviel erhält jeder?

Aufl. Die Teile verhalten sich wie 36 : 24 : 16 d. i. 9 : 6 : 4, folglich betragen sie

$$9728 \times \tfrac{9}{19} \text{ Thlr.}, \quad 9728 \times \tfrac{6}{19} \text{ Thlr.}, \quad 9728 \times \tfrac{4}{19} \text{ Thlr.}$$

Ausr. $9728 : 19 = 512$, $512 \times 9 = 4608$
$22 \qquad 512 \times 6 = 3072$
$38 \qquad 512 \times 4 = 2048$
9728

Antw. Die Brüder erhalten 4608, 3072, 2048 Thlr.

Aufgabe.

Vier Perſonen kaufen ein Los, wozu A 8 Thlr. 10 Sgr., B 12 Thlr. 25 Sgr., C 6 Thlr. 20 Sgr., D 13 Thlr. giebt. Das Los gewinnt 10 000 Thlr., wovon $12\frac{1}{2}$ Proc. die Hauptkaſſe und $3\frac{1}{3}$ Proc. der Einnehmer abzieht. Wieviel bekommt jeder?

Aufl. Die Lotteriekaſſe zahlt für das Los $\frac{10\,000 \text{ Thlr.} \times 87\frac{1}{2}}{100}$

der Einnehmer zahlt dafür $\frac{10\,000 \text{ Thlr.} \times 87\frac{1}{2} \times 96\frac{2}{3}}{100 \times 100}$ aus. Dieſe Geldſumme haben die vier Perſonen nach Verhältnis der Beiträge zu teilen, welche ſich verhalten wie

$$250 : 385 : 200 : 390 = 50 : 77 : 40 : 78$$

Die vier Perſonen erhalten $\frac{50}{245}$, $\frac{77}{245}$, $\frac{40}{245}$, $\frac{78}{245}$ der ausgezahlten Summe.

Ausr. $87\frac{1}{2} \times 96\frac{2}{3} = 8458\frac{1}{3}$, $8458\frac{1}{3} : 245 = 34\frac{11}{21}$

A erhält $34\frac{11}{21} \times 50 = 1726\frac{4}{21}$ Thlr.
B " $34\frac{11}{21} \times 77 = 2658\frac{1}{3}$ "
C " $34\frac{11}{21} \times 40 = 1380\frac{20}{21}$ "
D " $34\frac{11}{21} \times 78 = 2692\frac{6}{7}$ "
$8458\frac{1}{3}$

Aufgabe.

Im Sprengpulver verhalten ſich die Maſſen von Salpeter und Kohle wie 16 zu 5, von Salpeter und Schwefel wie 10 zu 3. Wieviel von dieſen Stoffen iſt zu 5934 Pfund Sprengpulver nötig?

Aufl. Auf 1 Pfund Salpeter kommt $\frac{5}{16}$ Pfd. Kohle und $\frac{3}{10}$ Pfd. Schwefel, mithin iſt 5934 Pfd. nach den Verhältniſſen $1 : \frac{5}{16} : \frac{3}{10} = 80 : 25 : 24$ zu teilen. Das Pulver enthält

$5934 \times \frac{80}{129}$ Pfd. Salpeter
$5934 \times \frac{25}{129}$ Pfd. Kohle
$5934 \times \frac{24}{129}$ Pfd. Schwefel

Ausr. $5934 : 129 = 46$, $46 \times 80 = 3680$ Pfd. Salpeter
$46 \times 25 = 1150$ " Kohle
$46 \times 24 = 1104$ " Schwefel
5934 Pfd. Pulver

Aufgabe.

Zu einer gemeinschaftlichen Unternehmung gab A 200 Thlr. auf 4 Monate, B 160 Thlr. auf 6 Monate, C 120 Thlr. auf 8 Monate. Sie gewannen 136 Thlr. Wieviel bekommt jeder davon?

Aufl. Gilt der Anspruch Eines, der 1 Thlr. auf 1 Monat gegeben hätte, als Einheit, so kommen vom Gewinn dem A 200×4, dem B 160×6, dem C 120×8 Einheiten zu, und ihre Ansprüche verhalten sich wie

$$200 \,.\, 4 : 160 \,.\, 6 : 120 \,.\, 8 = 5 : 6 : 6$$

Daher bekommt A $136 \times \frac{5}{17}$ Thlr., B und C $136 \times \frac{6}{17}$ Thlr. Nun ist $136 : 17 = 8$, mithin erhält

A $8 \times 5 = 40$ Thlr.
B $8 \times 6 = 48$ „
C $8 \times 6 = 48$ „
136 Thlr.

5. Die Mischungsregel betrifft die Ermittelung des Verhältnisses, nach welchem zwei Sorten von gegebenem Werte gemischt werden müssen, damit die Mischung einen gegebenen Wert erhält. Z. B. Aus zwei Sorten Wein, A und B, von denen das Quart 36 und 20 Sgr. kostet, soll eine Mittelsorte M gemischt werden, von der das Quart 30 Sgr. kostet. Man hat in der Mischung

an 1 Quart A 36 — 30 Sgr. d. i. 6 Sgr. Verlust
an 1 Quart B 30 — 20 Sgr. d. i. 10 Sgr. Gewinn

folglich

an 10 Quart A 6 . 10 Sgr. Verlust
an 6 Quart B 10 . 6 Sgr. Gewinn

Der Verlust an A wird durch den Gewinn an B aufgehoben, wenn man 10 Einheiten A mit 6 Einheiten B mischt, also

$$A : B = 10 : 6 = 5 : 3$$

d. h. $A = \frac{5}{8}$ B $= \frac{5}{8}$ der Mischung, $B = \frac{3}{5}$ A $= \frac{3}{8}$ der Mischung.

Die Mischungsregel lautet demnach: „Bilde die Differenzen der Werte von der bessern Sorte und der Mischung, von der Mischung und der schlechtern Sorte; mische die bessere Sorte mit der schlechtern nach dem Verhältnis der zweiten Differenz zur ersten Differenz."

Soll aus einer Sorte (A) zu 36 Sgr. durch Zusatz von Wasser (B) eine Sorte zu 30 Sgr. gemischt werden, so ist die erste Differenz 36 — 30 Sgr., die zweite Differenz 30 — 0 Sgr., folglich die Proportion der Bestandteile

$$A : B = 30 : 6 = 5 : 1$$

d. h. $B = \frac{1}{5} A = \frac{1}{6}$ der Mischung.

Aufgabe.

Aus 14lötigem Silber (A) und 8lötigem Silber (B) soll 12lötiges Silber gemischt werden. Das Silber heißt 14lötig, wenn eine Mark desselben 14 Lot fein Silber (und 2 Lot Kupfer) enthält.

Aufl. Die erste Differenz beträgt 14 — 12 Lot f., die zweite Differenz 12 — 8 Lot f., folglich

$$A : B = 4 : 2 = 2 : 1$$

d. h. $A = 2\,B = \frac{2}{3}$ der Mischung

$B = \frac{1}{2} A = \frac{1}{3}$ der Mischung

Soll aus 14lötigem Silber (A) durch Zusatz von Kupfer (B) 12lötiges Silber bereitet werden, so ist die erste Differenz 14 — 12 Lot f., die zweite Differenz 12 — 0 Lot f., also

$$A : B = 12 : 2 = 6 : 1$$

d. h. $B = \frac{1}{6} A = \frac{1}{7}$ der Mischung.

§. 14. Die Decimalbrüche.

In allen Sprachen sind die Zahlwörter nach dem Decimalsystem gebildet, so daß zehn Einheiten in einen Zehner, zehn Zehner in ein Hundert, zehn Hunderte in ein Tausend zusammengefaßt werden; die neueren Sprachen vereinigen dann tausend Tausende in eine Million, million Millionen in eine Billion, u. s. w. Bei der Bezeichnung der Zahlen gebraucht man allgemein nach indischer Erfindung, die zuerst durch die Araber weiter verbreitet wurde, dieselben zehn Ziffern, welche für sich Einer bedeuten, auch zur Angabe höherer Einheiten und macht die höhern Einheiten durch ihre Stellung vor die Einer kenntlich, so daß die Zehner die 1te, die Hunderte die 2te, die Tausende die 3te, . . , die Millionen die 6te, . . , die Billionen die 12te, . . Stelle vor den Einern einnehmen. Ebenso werden zur Bezeichnung von niedern Einheiten (Brüchen) die Stellen nach den Einern angewendet*).

*) Die Rechnung mit den indischen (arabischen) Ziffern ist in Indien erfunden, unter dem Khalifen Almamun 820 von Mohammed ben Musa Alcharezmi ausgebildet, nach diesem „der Algorithmus" (Alcharezmi) benannt, und im 13. Jahrhundert in Europa bekannter worden. Das Wort Algorithmus wurde später für jede Art von Rechnungs-Operationen gebraucht. Regiomontan vertauschte um 1464 die bei den griechischen Mathematikern und deren Nachfolgern gebräuchlichen Sexagesimalbrüche mit den bequemeren Decimalbrüchen. In allgemeineren Gebrauch kamen die Decimalbrüche seit der zweiten Hälfte des 16. Jahrhunderts (Recorde 1557, Stevin 1585). Die Abkürzung der Decimalbruchrechnung hat Keppler 1623 durch Prätorius (von Altdorf) kennen gelernt. Vergl. Grunert Archiv 24 p. 296.

Die Einheiten einer bestimmten Stelle sind im Decimalsystem 10mal so groß als die Einheiten der (rechts) folgenden, z. B. auf die Tausende folgen Hunderte, auf die Hunderte Zehner, auf die Zehner Einer. Auf die Einer folgen daher in der 1ten Stelle Zehntel, in der 2ten Stelle Hundertel, in der 3ten Stelle Tausendtel, in der 6ten Milliontel, in der 12ten Billiontel, u. s. f. Um die Einer als solche anzuzeigen, macht man nach denselben ein Komma (Punkt, das Einerzeichen). Daher bedeutet 426,357 . .

4 Hunderte + 2 Zehner + 6 Einer + 3 Zehntel
+ 5 Hundertel + 7 Tausendtel + . .

Gleichwie nun 4 Hunderte = 40 Zehner = 400 Einer, 2 Zehner = 20 Einer, also die ganze Zahl = 426 Einer, so sind 3 Zehntel = 30 Hundertel = 300 Tausendtel, 5 Hundertel = 50 Tausendtel, also die gebrochene Zahl = 357 Tausendtel. Man kann aber auch die 426 Einer zu 426 000 Tausendtel machen und erhält eingerichtet 426 357 Tausendtel. Daher

$$426{,}357 = 426\tfrac{357}{1000} = {}^{4}\tfrac{26357}{1000}$$

1. Brüche, deren Nenner Einheiten des Decimalsystems, 10, 100, 1000, . . . (Potenzen der 10) sind, heißen Decimalbrüche. Sie werden ohne Nenner geschrieben, indem man die Zehntel von den Einern durch ein Komma trennt. Brüche mit andern Nennern heißen gemeine Brüche.

2. Um eine gemischte Decimalzahl zu lesen, liest man entweder (zerlegt) nächst der ganzen Zahl einen Bruch, dessen Zähler die nach dem Komma stehende Zahl und dessen Nenner der Nenner der letzten Stelle ist, oder (eingerichtet) einen Bruch, dessen Zähler die Decimalzahl ohne das Komma, und dessen Nenner der Nenner der letzten Stelle ist.

Zerlegen und Einrichten geschieht bei Decimalbrüchen ohne die Rechnung, welche bei gemeinen Brüchen erfordert wird (§. 8, 1).

3. Da die Bruchstellen nach der Einerstelle beurteilt werden, so kann die letztere nie fehlen. Ist der Decimalbruch echt, so muß er mit 0 Einern beginnen; z. B.

7 Zehntel = 0,7
28 Hundertel = 2 Zehntel + 8 Hundertel = 0,28
9 Hundertel = 0 Zehntel + 9 Hundertel = 0,09
307 Tausendtel = 3 Zehntel + 0 Hundertel + 7 Tausendtel = 0,307
1 Tausendtel = 0,001
1 Milliontel = 0,000 001
1847 Hunderttausendtel = 0,018 47 u. s. f.

Um einen Decimalbruch zu schreiben, schreibt man seinen Zähler (und vor denselben, wenn nötig noch Nullen, bis soviel Ziffern dastehen, als der Nenner hat) und setzt das Komma so, daß die letzte Stelle den gegebenen Nenner hat.

$\frac{183,5}{10} = 183,5 \quad \frac{183,5}{100} = 18,35$ u. s. f.

4. Da 7 Zehntel = 70 Hundertel = 700 Tausendtel u. s. f. und 3 Einer = 30 Zehntel = 300 Hundertel u. s. f., so kann man an einen Decimalbruch oder an eine ganze Zahl, nachdem man das Komma nach der Einerstelle gemacht hat, Nullen beliebig anhängen oder vom Ende weglassen.

$$0{,}7 = 0{,}70 = 0{,}700 \ldots$$
$$3 = 3{,}0 = 3{,}00 \ldots$$
$$1800 : 100 = 18{,}00 = 18$$
$$1800 : 1000 = 1{,}800 = 1{,}8$$
$$1800 : 1000\,000 = 0{,}001\,800 = 0{,}0018$$

Die Umformung (§. 8, 3) von Decimalbrüchen erfordert keine Rechnung, sobald man nicht zu gemeinen Brüchen übergeht.

Nach dem Muster des Decimalsystems mit der Grundzahl 10 kann man auch auf andere Grundzahlen Zahlsysteme bauen, z. B. ein Duodecimalsystem auf die Grundzahl 12. Dazu braucht man noch 2 Ziffern für zehn und elf, z. B. z, e, und bildet aus 12 Einern 1 Zwölfer (bez. 10), aus 12 Zwölfern 1 Hundertvierundvierziger (bez. 100), aus 12 Hundertvierundvierzigern 1 Tausendsiebenhundertachtundzwanziger (bez. 1000) u. s. w. Auf die Einer folgen dann rechts Duodecimalbrüche, Zwölftel in der ersten, Hundertundvierundvierzigstel in der zweiten, Tausendsiebenhundertachtundzwanzigstel in der dritten Stelle, u. s. w. Daher bedeutet die Duodecimalzahl 7z08,5e4 folgende Decimalzahl:

	7 ×	1728	12096
+	10 ×	144	1440
+	0 ×	12	0
+	8 ×	1	8
+	5 ×	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$
+	11 ×	$\frac{1}{144}$	$\frac{11}{144}$
+	4 ×	$\frac{1}{1728}$	$\frac{4}{1728}$
			$13544\frac{101}{216}$

Praktische Bedeutung können andere Zahlsysteme, als das Decimalsystem, nicht erlangen, weil die Zahlwörter der Kultursprachen auf das Decimalsystem gegründet sind, und in einer gegebenen Sprache nicht willkürlich neue Wörter gebildet werden können.

§. 15. Addition und Subtraktion der Decimalbrüche.

1. Wie man Einer zu den Einern, Zehner zu den Zehnern u. s. f. bei ganzen Zahlen addiert, so addiert man Zehntel zu den Zehnteln, Hundertel zu den Hunderteln u. s. f., indem man von der niedrigsten Stelle anfängt; z. B.

$$\begin{array}{r} 27{,}568 \\ +\ 5{,}874 \\ \hline 33{,}442 \end{array}$$

	8	+ 4	Tausendtel	= 12	Tausendtel	= 1 Hundertel	+ 2	Tausendtel
1 +	6	+ 7	Hundertel	= 14	Hundertel	= 1 Zehntel	+ 4	Hundertel
1 +	5	+ 8	Zehntel	= 14	Zehntel	= 1 Einer	+ 4	Zehntel
1 +	7	+ 5	Einer	= 13	Einer	= 1 Zehner	+ 3	Einer
1 +	2		Zehner	= 3	Zehner			

$$\begin{array}{r} 35{,}894 \\ +\ 0{,}1307 \\ \hline 36{,}0247 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 27{,}568 \\ +\ 1{,}232 \\ \hline 28{,}8 \end{array}$$

Die Zehntausendtel des ersten Beispiels bleiben ungeändert; die Nullen am Ende des letztern können wegbleiben.

2. Ebenso subtrahiert man Zehntel von Zehnteln, Hundertel von Hunderteln u. s. w., indem man, wenn nötig, 1 Einer = 10 Zehntel = 100 Hundertel . . , oder 1 Zehntel = 10 Hundertel . . zu Hilfe nimmt (borgt); z. B.

$$\begin{array}{r} 35{,}0305 \\ -\ 6{,}8941 \\ \hline 28{,}1364 \end{array}$$

5	− 1	Zehntausendtel	= 4	Zehntausendtel
10	− 4	Tausendtel	= 6	Tausendtel
12	− 9	Hundertel	= 3	Hundertel
9	− 8	Zehntel	= 1	Zehntel
14	− 6	Einer	= 8	Einer
2		Zehner.		

$$\begin{array}{r} 1{,}534 \\ -\ 0{,}734 \\ \hline 0{,}8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ -\ 0{,}794 \\ \hline 0{,}206 \end{array}$$

Die Nullen am Ende können wegbleiben. Statt 1 hat man 1,000 zu nehmen.

Bei diesen Rechnungen zeigen die Decimalbrüche besondern Vorteil vor den gemeinen Brüchen.

§. 16. Multiplikation der Decimalbrüche.

1. Um einen Decimalbruch mit 10, 100, 1000, . . zu multiplicieren, rückt man das Komma 1, 2, 3, . . Stellen weiter rechts, z. B.

$7{,}23 \times 10 = 72{,}3 \qquad 11{,}5 \times 10 = 115 \qquad 0{,}007 \times 10 = 0{,}07$

$1{,}0073 \times 100 = 100{,}73 \qquad 0{,}0067 \times 100 = 0{,}67$

$0{,}723 \times 1000 = 723 \qquad 0{,}723 \times 10\,000 = 7230$

Denn indem man mit 10 multipliciert, werden aus Zehnern Hunderte, aus Einern Zehner, aus Zehnteln Einer, aus Hunderteln Zehntel, u. s. w. und die Einheiten jeder Stelle gehen in Einheiten der nächst höhern

Stelle über. Indem man mit 100 multipliciert, gehen die Einheiten jeder Stelle in Einheiten der 2ten höhern Stelle über u. s. f.

Umgekehrt: um einen Decimalbruch durch 10, 100, 1000, . . zu dividieren, rückt man das Komma 1, 2, 3, . . Stellen weiter links.

$$17{,}23 : 10 = 1{,}723 \qquad 7{,}23 : 10 = 0{,}723$$
$$17{,}23 : 100 = 0{,}1723 \qquad 17{,}23 : 1000 = 0{,}017\,23$$
$$0{,}03 : 10\,000 = 0{,}000\,003$$

Diese Regeln folgen auch aus den allgemeinen Regeln §. 10.

2. Um einen Decimalbruch mit einem Decimalbruch zu multiplicieren, multipliciert man denselben mit den einzelnen Stellen des Multiplikator, von der höchsten bis zur letzten, macht in der ersten Zeile des Produkts das Komma, rückt jede folgende Zeile des Produkts eine Stelle weiter rechts hinaus, und addiert die einzelnen Produkte.

Multipliciert man zuerst mit Einern, so behält das Komma den Platz, den es im Multiplikandus hatte, z. B.

$$\frac{7{,}543 \cdot 6}{45{,}258} \text{ weil } 7{,}543 \cdot 6 = \frac{7543 \cdot 6}{1000}$$

Multipliciert man zuerst mit Zehnern, Hunderten, . . , so setzt man das Komma 1, 2, . . Stellen weiter rechts, z. B.

$$\frac{7{,}543 \cdot 40}{301{,}72} \qquad \frac{7{,}543 \cdot 800}{6034{,}4} \qquad \frac{0{,}5763 \cdot 2000}{1152{,}6}$$

weil $7{,}543 \cdot 40 = 75{,}43 \cdot 4$, u. s. w.

Multipliciert man zuerst mit Zehnteln, Hunderteln, . . , so setzt man das Komma 1, 2, . . Stellen weiter links, z. B.

$$\frac{7{,}543 \cdot 0{,}2}{1{,}5086} \qquad \frac{7{,}543 \cdot 0{,}05}{0{,}37715} \qquad \frac{7{,}543 \cdot 0{,}007}{0{,}052\,801}$$

weil $7{,}543 \cdot 0{,}2 = 0{,}7543 \cdot 2$, u. s. w.

Multipliciert man ferner mit den auf die höchste folgenden Stellen des Multiplikator, so hat man jede neue Zeile des Produkts eine Stelle weiter rechts auszurücken. Z. B.

$\frac{7{,}543 \cdot 46{,}25}{}$	$\frac{46{,}25 \cdot 7{,}543}{}$
301,72	323,75
45 258	23 125
1 5086	1 8500
37715	13875
348,86375	348,86375

$$62\,500 \cdot 0{,}001\,28 = \underline{625 \cdot 0{,}128}$$

62,5
12 50
5 000
80

Man nimmt 625 . 100 statt 62 500, und multipliciert den Bruch mit 100. Die Nullen am Ende bleiben weg.

$$15{,}743 \cdot 322{,}69 = 1574{,}3 \cdot 3{,}2269$$

Man kann den einen Faktor durch 100 dividieren, wenn man den andern mit 100 multipliciert.

Man kann nach der allgemeinen Regel §. 12, 2 die Zähler (ganze Zahlen) multiplicieren und ihr Produkt durch das Produkt der Nenner dividieren, d. h. soviel Stellen durch das Komma vom Produkt der Zähler rechts abschneiden, als Bruchstellen in beiden Faktoren zusammengenommen vorhanden sind. Hat z. B. der eine Faktor 3, der andere 4 Bruchstellen, so hat das ungekürzte Produkt 3 + 4 d. i. 7 Bruchstellen; denn der Nenner 1000 mit dem Nenner 10 000 multipliciert giebt den Nenner 10 000 000, welcher der 7ten Bruchstelle zukommt. Dieses Verfahren ist aber für das praktische Rechnen nicht zu empfehlen, weil es bei der abgekürzten Multiplikation (§. 18) nicht ohne weiteres anwendbar ist.

§. 17. Division der Decimalbrüche.

1. Ist der Divisor eine ganze Zahl, so findet man

die ganze Zahl des Quotienten, indem man die ganze Zahl des Dividendus dividiert;

die Zehntel des Quotienten, indem man die Zehntel des Dividendus mit Einschluß des Einerrestes dividiert;

die Hundertel des Quotienten, indem man die Hundertel des Dividendus mit Einschluß des Zehntelrestes dividiert, u. s. w. Fehlen Bruchstellen im Dividendus zur Fortsetzung der Division, so hängt man Nullen an denselben (§. 14, 4). Z. B.

326,74 : 28 = 11,6692

28	
46	11,6692 . 28
28	233,384
187	93 3536
168	24
194	326,74
168	
260	
252	
80	
56	
24 . . .	

0,053 : 9 = 0,005 88

0
5
53
80
80
8 . . .

5 : 7 = 0,714 2857

50
10
30
20
60
40
50
1 . . .

Wie weit man die Division, wenn sie nicht aufgeht, fortzusetzen hat, hängt von der Natur der Aufgabe ab. Man benutzt den Rest, um den berechneten Quotienten so genau als möglich, den Fehler desselben so klein als möglich zu machen (vergl. §. 3, 4). Genügt es z. B., den Quotienten von 326,74 : 28 bis auf Zehntausendtel zu berechnen, und darf man die Hunderttausendtel desselben als unmerklich klein vernachlässigen, so ist als Quotient 11,6693 und nicht 11,6692 anzugeben, weil bei der letzten Division 80 : 28 näher 3 als 2 ist. Der Fehler des Quotienten 11,6693 beträgt weniger als $\frac{1}{2}$ Zehntausendtel und ist so klein als möglich, wenn man auf die Angabe kleinerer Bruchteile verzichtet. Denn indem man 80 : 28 = 3 nimmt, vernachlässigt man $\frac{4}{28}$ (d. i weniger als $\frac{1}{2}$) Zehntausendtel, während man, indem man 80 : 28 = 2 nimmt, $\frac{24}{28}$ (d. i. mehr als $\frac{1}{2}$) Zehntausendtel, vernachlässigen würde.

Ebenso ist 0,053 : 9 genauer 0,005 89 als 0,005 88. Dagegen ist 5 : 7 genauer 0,714 2857 als 0,714 2858. Man vermehrt die letzte Stelle des unvollständigen Quotienten um 1, wenn der Rest mehr als die Hälfte des Divisor ist. Der Fehler des Quotienten wird dann nicht mehr als $\frac{1}{2}$ Einheit seiner letzten Stelle betragen.

2. Um durch einen Decimalbruch zu dividieren, multipliciert man mit dem Nenner (§. 16, 1) und dividiert das Produkt durch den Zähler, wie bei einem gemeinen Bruche (§. 11, 3). Z. B.

$$17{,}4832 : 3{,}125 = 17{,}4832 \cdot 1000 : 3125$$
$$= 17483{,}2 : 3125 = 5{,}59\ldots$$

15625
18582
15625
29570
28125
1445 . .

$$0{,}043\,81 : 0{,}35 = 4{,}381 : 35$$
$$0{,}09 : 0{,}3845 = 900 : 3845$$

Statt 0,09 kann man 0,0900 setzen. Nun sind 3845 Zehntausendtel in 900 Zehntausendteln sovielmal enthalten als 3845 in 900. Also kann man das Komma weglassen, nachdem Dividendus und Divisor gleichnamig gemacht sind. Vergl. §. 11, 3.

3. Sind Dividendus und Divisor (abgesehen vom Komma) relative Primzahlen (§. 7, 3), und ist der Divisor 2, 4, 8, 16, 32, 64, . . (eine Potenz der 2) oder 5, 25, 125, 625, 3125, . . (eine Potenz der 5) oder nur aus diesen Zahlen zusammengesetzt, wie 20, 40, 80, 160, 320, 640, . . , 50, 200, 400, 800, . . , 250, 500, 2000, 4000, . . , 1250, 2500, 5000, 20 000, . . u. s. w., so geht die Division auf und der Quotient ist ein vollständiger (endlicher) Decimalbruch. Die Division geht auf, wenn z. B.

Divisor 20 Rest 13, weil $\frac{13}{20} = \frac{13 \cdot 5}{20 \cdot 5} = 0{,}65$

= 125 = 72 = $\frac{72}{125} = \frac{72 \cdot 8}{125 \cdot 8} = 0{,}576$

= 36 = 27 = $\frac{27}{36} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = 0{,}75$

= 56 = 35 = $\frac{35}{56} = \frac{5 \cdot 125}{8 \cdot 125} = 0{,}625$

In der That findet man

27,53 : 20 = 1,3765
75
153
130
100
0

607,2 : 125 = 4,8576
500
1072
1000
720
625
950
875
750
750
0

18387 : 36 = 510,75	35 : 56 = 0,625
180	350
38	336
36	140
270	112
252	280
180	280
180	0
0	

4. Wenn der Divisor prim zum Dividendus (Rest) und durch eine von 2 und 5 verschiedene Primzahl teilbar ist, so geht die Division nicht auf, und der Quotient ist ein periodischer unendlicher Decimalbruch, den man so abbricht, daß der Fehler die erforderliche Kleinheit hat.

Ist z. B. der Divisor 7 und der Rest 3, so kann der zur letzten Stelle des Quotienten gehörige Bruch $\frac{3}{7}$ nicht genau in einen Decimalbruch verwandelt werden, weil 7 nicht in 10, 100, 1000, . . aufgeht (§. 8, 3). Ist der Divisor 12 und der Rest 5, so kann $\frac{5}{12}$ zwar auf $\frac{125}{300}$ gebracht, aber $\frac{125}{300}$ nicht genau in einen Decimalbruch verwandelt werden, weil 300 in 1000, 10 000, . . ebensowenig aufgeht als 3 in 10. Daher können die Divisionen 3,00.. : 7, 5,00.. : 12 u. dergl. nicht aufgehen.

Bei dem Divisor 7 können nur die Reste 1, 2, 3, 4, 5, 6, erscheinen. Hat man daher bis zur 6ten Division verschiedene Reste erhalten, so bleibt bei der 6ten Division ein Rest, welcher schon einmal mit einer Null versehen und dividiert worden ist. Man findet also denselben Quotienten und Rest wie früher, denen die übrigen Quotienten und Reste in unaufhörlicher Wiederkehr folgen. Die sich wiederholende Reihe der einzelnen Quotienten, deren Anzahl kleiner ist als der Divisor, heißt die Periode des unendlichen Decimalbruchs. Z. B.

3 : 7 = 0,428 571 428 571 428 . . . bezeichnet 0,[428 571]

30		
20		
60	31 : 33 = 0,[93]	19 : 111 = 0,[171]
40	310	190
50	297	111
10	130	790
3...	99	777
	31...	130
		111
		19

```
7 : 9 = 0,[7]
70
 7 . . .

1 : 369 = 0,[00271]
10
100
1000
 738
 2620
 2583
   370
   369
     1 . . .

1 : 15 = 0,0[6]
10
100
 10 . . .
 119 : 220 = 0,54[09]
 1190
 1100
   900
   880
    2000
    1980
      20 . .
```

Die Periode beginnt mit der Stelle, zu deren Berechnung zuerst eine Null dem Rest angehängt wurde, außer wenn der Divisor durch 2 oder 5 teilbar ist.

5. Jeder gemeine Bruch kann entweder in einen endlichen oder in einen periodischen unendlichen Decimalbruch verwandelt werden. Denn ein Bruch ist der Quotient des Zählers durch den Nenner, z. B. $\frac{7}{12} = 7 : 12$, u. s. w.

Umgekehrt: jeder periodische unendliche Decimalbruch ist einem bestimmbaren gemeinen Bruche gleich. Man findet nämlich

$$\frac{1}{9} = 0,[1] \quad \frac{1}{99} = 0,[01] \quad \frac{1}{999} = 0,[001]$$
$$\frac{1}{9999} = 0,[0001] \quad \frac{1}{99999} = 0,[000\,01] \text{ u. s. f.}$$

folglich ist

$$0,[6] = 0,[1] \,.\, 6 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$
$$0,[36] = 0,[01] \,.\, 36 = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$$
$$0,[270] = 0,[001] \,.\, 270 = \frac{270}{999} = \frac{10}{37}$$
$$0,0[4] = 0,[4] : 10 = \frac{4}{9} : 10 = \frac{2}{45}$$
$$0,8[3] = 8,[3] : 10 = 8\tfrac{1}{3} : 10 = \frac{5}{6}$$
$$0,29[74] = 29,[74] : 100 = 29\tfrac{74}{99} : 100 = \frac{589}{1980}$$

§. 18. Rechnung mit unvollständigen Decimalzahlen.

Eine Messung kann nicht vollkommen genau, sondern nur mit einer durch die Beschaffenheit der Meßinstrumente und der menschlichen Sinne begrenzten Genauigkeit ausgeführt werden. Die durch Messung gefundenen Zahlen sind daher nur bis zu einer bestimmten Grenze abwärts verbürgt, und müssen als mehr oder weniger unvollständig (fehlerhaft) betrachtet werden. Auch sind eine große Klasse durch Rechnung bestimm-

ter Zahlen ihrer Natur nach Summen von unendlich vielen Gliedern, z. B. Wurzeln, Logarithmen, Sinus, die Ludolfsche Zahl, die Grundzahl der natürlichen Logarithmen u. s. w., und können folglich nur unvollständig angegeben werden, wenn auch so, daß in jedem gegebenen Falle der Fehler unbeträchtlich ist. Es ist notwendig zu wissen, wieweit die durch Rechnung mit unvollständigen Zahlen gefundenen Zahlen verbürgt sind.

Bei jeder unvollständigen Zahl wird angenommen, daß der Fehler weniger beträgt, als $\frac{1}{2}$ Einheit der letzten angegebenen Stelle. Unter Voraussetzung der Unvollständigkeit bedeutet demnach

35	eine	Zahl	zwischen	34,5	und	35,5
1,427	=	=	=	1,4265	=	1,4275
0,4700	=	=	=	0,469 95	=	0,470 05
20 734 Tausend	=	=	=	20 733 500	=	20 734 500
$329\frac{3}{7}$	=	=	=	$329\frac{3}{14}$	=	$329\frac{5}{14}$

Wenn eine Zahl genauer gegeben ist, als es für einen bestimmten Zweck nötig ist, so kann man sie verkürzen d. h. die Einheiten niederer Stellen weglassen. Dabei vermehrt man die zuletzt behaltene Stelle um 1, wenn in der folgenden Stelle mehr als 5 steht. Z. B.

38,5764 ist näher 38,5760 als 38,5770, daher abgekürzt 38,576. Dieselbe Zahl ist näher 38,60 als 38,50, daher noch mehr abgekürzt 38,6.

Für 27 538 936 schreibt man 27,539 Millionen, wenn nur noch die Tausende in Betracht kommen.

0,46996 wird abgekürzt 0,4700, wenn nur noch die Zehntausendtel in Betracht kommen. Die Nullen am Ende sind in diesem Falle nicht ohne Bedeutung.

Unter der Genauigkeit einer Zahlangabe hat man das Verhältnis der Zahl zu ihrem Fehler, also zu einer Einheit der letzten angegebenen Stelle, welche nicht mehr fehlerfrei ist, zu verstehen. Z. B. die Angabe 86,43 hat die Genauigkeit 86,43 : 0,01 = 8643 d. h. von 8643 Einheiten ist nur eine nicht ganz verbürgt. Die Angaben 86,43 und 0,008 643 haben einerlei Genauigkeit, weil

$$86{,}43 : 0{,}01 = 0{,}008\,643 : 0{,}000\,001 = 8643$$

Die Größe, von der man weiß, daß sie 8192 Fuß beträgt, ist genauer bekannt, als die Größe, von der man weiß, daß sie 0,3024 Zoll beträgt, weil

$$8192 : 1 = 8192 \text{ und } 0{,}3024 : 0{,}0001 = 3024$$

Am meisten Genauigkeit besitzen die astronomischen Angaben; bei den

chemischen und physikalischen Zahlen hat man die gleiche Genauigkeit nur in seltenen Fällen erreicht.

1. Addition und Subtraktion.

7,329	7,329
+ 3,487	− 3,842
10,816	3,487

Hier kann der Fehler der Summe und Differenz ein halbes Tausendtel übersteigen. Bei mehreren Gliedern würde die letzte Stelle immer unsicherer werden.

0,013 74	9,243
+ 9,256	− 0,0148
9,270	9,228

Die Glieder werden sämtlich bei derselben Stelle abgebrochen; schon die Zehntausendtel der Summe sind unbestimmbar, weil das eine Glied nicht bis dahin gegeben ist. Man nimmt daher 0,014 statt 0,01374.

2. Multiplikation.

Ein Produkt kann nicht mit größerer Genauigkeit angegeben werden, als das Produkt des minder genauen Faktors mit der höchsten Stelle des genaueren Faktors. Man nimmt daher den ungenaueren Faktor zum Multiplikandus, den genaueren Faktor zum Multiplikator, und berechnet die erste Zeile des Produkts wie gewöhnlich (§. 16, 2). Dann wird der Multiplikandus mehr und mehr verkürzt, und von dem rechts Auszurückenden nur dasjenige in Rechnung gezogen, was auf die letzte Stelle der ersten Zeile Einfluß hat. Z. B.

5,392 . 7,386
37,744
1 618
431
32
39,825

In der zweiten Zeile ist 2 . 3 = 6 auszurücken, also wird oben 2 gestrichen, und 1 zu 539 . 3 addiert, weil 6 näher 10 als 0.

In der dritten Zeile ist noch 9 . 8 = 72 auszurücken, also oben 9 zu streichen, und 7 zu 53 . 8 zu addieren, weil 72 näher 70 als 80.

In der vierten Zeile ist noch 3 . 6 = 18 auszurücken, also oben 3 zu streichen, und 2 zu 5 . 6 zu addieren, weil 18 näher 20 als 10.

Die letzte Stelle des Produkts wird unsicher, weil ihr möglicher

Fehler die möglichen Fehler der letzten Stellen der einzelnen Zeilen in sich schließt.

0,0267 . 76,384	357 600 . 18 470
1,869	= 1,847 . 3,576 Tauſ. Mill.
160	5,541
8	924
2	129
2,039	11
	6,605 Tauſendmillionen.

3. Diviſion.

Die höchſte Stelle des Quotienten wird wie gewöhnlich (§. 17, 2) berechnet, die fernere Diviſion abgekürzt.

a. Iſt der Diviſor genauer als der Dividendus, ſo wird der Diviſor ſoweit verkürzt, als es zur Subtraktion ſeines Produkts mit der gefundenen Stelle des Quotienten vom gegebenen Dividendus nötig iſt. Zur Fortſetzung der Diviſion wird nicht der Reſt verlängert, ſondern der Diviſor verkürzt. Bei jeder Multiplikation wird der Einfluß der zuletzt geſtrichenen Stelle des Diviſor in Betracht gezogen. Z. B.

0,01034 : 94,65
= 1,034 : 9465 = 0,000 1092
10
103
1034
947
87
85
2
2

An 1034 kann 0 nicht angehängt werden; man ſtreicht 5 am Diviſor und ſubtrahiert 1 + 946 . 1, weil 5 näher 10 als 0.

An 87 kann 0 nicht angehängt werden; man ſtreicht 6 am Diviſor und ſubtrahiert 0; man ſtreicht ferner 4 am Diviſor und ſubtrahiert 4 + 9 . 9, weil 4 . 9 näher 40 als 30 iſt.

Die letzte Stelle 2 des Quotienten (20 : 9) iſt unſicher wegen des möglichen Fehlers in der letzten Stelle des Reſtes.

b. Iſt der Diviſor ungenauer als der Dividendus, ſo wird der Dividendus ſoweit verkürzt, als es zur Subtraktion des Produkts aus der gefundenen Stelle des Quotienten mit dem Diviſor nötig iſt. Die Diviſion wird fortgeſetzt wie vorhin. Z. B.

658,37 : 4,281
= 65837₀ : 4281 = 153,8
4281
2303
2141
162
128
34
34

Der Dividendus ist näher 658 4₀₀ als 658 3₀₀, also der erste Rest 2303. Für die zweite Division wird am Divisor 1, am Rest 7 gestrichen. Für die dritte Division wird am Divisor 8, am Rest 0 gestrichen und im Quotienten das Komma gemacht, nachdem man die Einer des Dividendus dividiert hat. Für die folgende Division wird am Divisor 2 gestrichen.

1 : 45,78
= 100 : 4578 = 0,021 84
1000
10000
9156
844
458
386
366
20
18

4865 : 0,273
= 4865₀₀₀ : 273 = 179₀₀
273 = 17,9 Tausd.
214
191
23
24

Anwendungen.

1) 6 Thlr. 6 Sgr. 9¼ Pf. als Decimalbruch eines Thlr. bis auf 0,01 Pf. genau anzugeben.

¼ Pf. = 0,57 Pf.
6 Sgr. 9¼ Pf. = 81,57 : 360 Thlr.
8,157 : 36 = 0,2266. 6 Thlr. 6 Sgr. 9¼ Pf. = 6,2266 Thlr.
72
95
72
237
216
21
22

Umgekehrt 0,2266 Thlr. = 0,2266 . 30
6,798 Sgr.
0,798 Sgr. = 0,798 . 12
9,57₆ Pf.
Also 0,2266 Thlr. = 6 Sgr. 9,57₆ Pf.

2) Das (mittlere tropische) Jahr hat 365,242 22 (mittlere Sonnen-) Tage. Es sollen die Stunden, Minuten, Sekunden angegeben werden.

$$\begin{aligned} 0{,}242\,22 \text{ Tage} &= 0{,}242\,22 \cdot 24 \\ &\quad\overline{5{,}8133} \text{ Stunden} \\ 0{,}8133 \text{ Stunden} &= 0{,}8133 \cdot 60 \\ &\quad\overline{48{,}798} \text{ Minuten} \\ 0{,}798 \text{ Minuten} &= 0{,}798 \cdot 60 \\ &\quad\overline{47{,}88} \text{ Sekunden} \end{aligned}$$

1 Jahr = 365 Tage 5 Stunden 48 Min. 47,9 Sek.

3) 7,643 mit $\frac{5}{12}$ zu multiplicieren, oder durch $\frac{5}{12}$ zu dividieren. Entweder multipliciert man mit 5 und dividiert das Produkt durch 12 (§. 11, 1), oder man multipliciert statt mit $\frac{5}{12}$ mit dem gleichgeltenden Decimalbruch von solcher Genauigkeit wie 7,643.

7,643 . 5	7,643 . 0,416 67
38,215 : 12 = 3,1846	3,0572
2 2	764
1 01	458
55	46
70	5
	3,18455

Um durch $\frac{5}{12}$ zu dividieren, multipliciert man mit 12 und dividiert das Produkt durch 5 (§. 11, 3), oder man dividiert durch den gleichgeltenden Decimalbruch.

7,643 . 12	7,643 : 0,416 67
91,716 : 5 = 18,343	= 7643000 : 41667 = 18,344
	41 67
	3476
	3333
	143
	125
	18
	16

4) 7,8649 + $9\frac{17}{88}$. Man kann $\frac{17}{88}$ nur dann unter die Hundertel abwärts entwickeln, wenn die Zahl $9\frac{17}{88}$ hinreichende Genauigkeit besitzt.

$$\begin{array}{rl} & 9 \\ 27 : 38 = & 0{,}7105 \\ 270 & + \ 7{,}8649 \\ 266 & \overline{17{,}5754} \\ \overline{40} & \\ 38 & \\ \overline{200} & \\ 190 & \\ \overline{10} & \end{array}$$

Um die Bruchreihe $\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{2.3.4.5.6} + \ldots$ bis auf 0,000 001 genau zu summieren, bemerke man, daß $\frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} : 3$, $\frac{1}{2.3.4} = \frac{1}{2.3} : 4$, u. s. f. (§. 10, 2). Die einzelnen Brüche müssen eine Stelle unter die vorgeschriebene Grenze entwickelt werden, weil die letzte Stelle der Summe durch die Addition unsicher wird.

$$\begin{array}{ll} 0{,}5 & : 3 \\ 0{,}166\,6667 & : 4 \\ 0{,}041\,6667 & : 5 \\ 0{,}008\,3333 & : 6 \\ 0{,}001\,3889 & : 7 \\ 0{,}000\,1984 & : 8 \\ 0{,}000\,0248 & : 9 \\ 0{,}000\,0028 & : 10 \\ \overline{0{,}000\,0003} & \\ \overline{0{,}718\,282} & \end{array}$$

5) Jemand hat in 3, 5, 7 Jahren jedesmal 560 Thlr. zu bezahlen, und will sofort mit $5\frac{1}{2}$ auf Hundert jährigem Diskonto seiner Schuld sich entledigen. Statt

$100 + 3 \,.\, 5\frac{1}{2}$ d. i. $116\frac{1}{2}$ Thlr. vom 1. Kapital werden 100 Thlr. gezahlt.
$100 + 5 \,.\, 5\frac{1}{2}$ " " $127\frac{1}{2}$ " " 2. " " 100 " "
$100 + 7 \,.\, 5\frac{1}{2}$ " " $138\frac{1}{2}$ " " 3. " " 100 " "

Daher sind $\frac{100}{116\frac{1}{2}} + \frac{100}{127\frac{1}{2}} + \frac{100}{138\frac{1}{2}}$ des Kapitals (560 Thlr.) zu entrichten.

$100 : 116\frac{1}{2} = 1000 : 1165 = 0{,}85837$

10000	$100 : 127\frac{1}{2}$	$= 0{,}78432$
9320	$100 : 138\frac{1}{2}$	$= 0{,}72202$
6800		$2{,}36471 \cdot 560$
5825		$1182{,}355$
975		$141\,883$
932 .		$1324{,}23_8$
43		
35		
8		

Die Schuld wird sofort mit 1324 Thlr. 7,1 Sgr. abgetragen.

6) Wenn 131 engl. Meilen = 28 preuß. Meilen, so ist 1 engl. M. $= \frac{28}{131}$ pr. M., 1 pr. M. $= \frac{131}{28}$ engl. M.

$28 : 131 = 0{,}21$	$131 : 28 = 4{,}7$
262	112
18	19
13	20

Ohne größere Genauigkeit der gegebenen Zahlen kann man die Decimalbrüche nicht weiter sicher berechnen.

Wenn 3,186 preuß. Fuß = 1 Meter, so ist 1 pr. Fuß = 1 : 3,186 = 0,3139 Meter.

$1 : 3{,}186 = 1000 : 3186 = 0{,}3139$

10000
9558
442
319
123
95
28
28

7) Aus den Angaben: 1 preuß. Kubikzoll Wasser wiegt $\frac{1}{9}$ preuß. Lot alten Stils, 1 Kubikcentimeter davon wiegt 1 Gramm, soll das Verhältnis von Lot und Gramm berechnet werden.

1 preuß. Fuß = 0,3139 Meter = 31,39 Centimeter

$$1 \text{ preuß. Zoll} = \frac{31{,}39}{12} \text{ Centimeter}$$

$$1 \text{ preuß. Kub. Z.} = \frac{31{,}39 \cdot 31{,}39 \cdot 31{,}39}{12 \cdot 12 \cdot 12} \text{ Kub. Centim.}$$

Daher ist

$$\frac{1}{9} \text{ preuß. Lot} = \frac{31{,}39 \cdot 31{,}39 \cdot 31{,}39}{12 \cdot 12 \cdot 12} \text{ Gramm.}$$

$$1 \text{ preuß. Lot} = \frac{31{,}39 \,.\, 31{,}39 \,.\, 31{,}39 \,.\, 9}{12 \,.\, 12 \,.\, 12 \,.\, 11} \text{ Gramm}$$

$$31{,}39 : 12 = 2{,}616 \,.\, 2{,}616 \qquad 6{,}844 \,.\, 2{,}616$$

73	5,232		13,688
19	1 570		4 106
7	26		68
	16	.	41
	6,844		17,903

$$17{,}903 \,.\, 9$$

$$161{,}13 : 11 = 14{,}65$$

51
71
53

Ein preuß. Lot beträgt 14,65 Gramm, vorausgesetzt, daß die Zahl $\frac{1}{9}$ hinreichend genau ist. In Wahrheit beträgt das preuß. Lot nur 14,626 Gramm, weil im franz. System dichtestes Wasser (4° C.), im preuß. System minder dichtes Wasser ($18\frac{3}{4}$° R.) vorausgesetzt wird.

8) Zu Neusilber nimmt man 53,4 Procent Kupfer, 29,1 Proc. Zink und 17,5 Proc. Nickel. Wieviel von diesen Metallen braucht man zu 1200 Pfd. Neusilber, wenn beim Schmelzen ein Verlust von $1\frac{1}{2}$ Proc. eintritt?

Statt 98,5 Pfd. jedes Metalls sind 100 zu nehmen, folglich

$$53{,}4 \,.\, 12 \,.\, \frac{100}{98{,}5} \text{ Pfd. Kupfer} = 650{,}3$$

$$29{,}1 \,.\, 12 \,.\, \frac{100}{98{,}5} \text{ Pfd. Zink} = 354{,}4$$

$$17{,}5 \,.\, 12 \,.\, \frac{100}{98{,}5} \text{ Pfd. Nickel} = 213{,}2$$

1218

Man berechnet 12 000 : 985 = 12,18 und multipliciert diese Zahl mit den Procenten.

Zweites Buch.

Allgemeine Arithmetik.

$$1 \text{ preuß. Lot} = \frac{31{,}39 \,.\, 31{,}39 \,.\, 31{,}39 \,.\, 9}{12 \,.\, 12 \,.\, 12 \,.\, 11} \text{ Gramm}$$

$$31{,}39 : 12 = \frac{2{,}616 \,.\, 2{,}616}{5{,}232} \quad \frac{6{,}844 \,.\, 2{,}616}{13{,}688}$$

73			
19	1 570		4 106
7	26		68
	16	.	41
	6,844		17,903

$$\frac{17{,}903 \,.\, 9}{161{,}13} : 11 = 14{,}65$$

51	
7	1
	53

Ein preuß. Lot beträgt 14,65 Gramm, vorausgesetzt, daß die Zahl $\frac{1}{9}$ hinreichend genau ist. In Wahrheit beträgt das preuß. Lot nur 14,626 Gramm, weil im franz. System dichtestes Wasser (4° C.), im preuß. System minder dichtes Wasser ($18\frac{3}{4}$° R.) vorausgesetzt wird.

8) Zu Neusilber nimmt man 53,4 Procent Kupfer, 29,1 Proc. Zink und 17,5 Proc. Nickel. Wieviel von diesen Metallen braucht man zu 1200 Pfd. Neusilber, wenn beim Schmelzen ein Verlust von $1\frac{1}{2}$ Proc. eintritt?

Statt 98,5 Pfd. jedes Metalls sind 100 zu nehmen, folglich

$$53{,}4 \,.\, 12 \,.\, \frac{100}{98{,}5} \text{ Pfd. Kupfer} = 650{,}3$$

$$29{,}1 \,.\, 12 \,.\, \frac{100}{98{,}5} \text{ Pfd. Zink} = 354{,}4$$

$$17{,}5 \,.\, 12 \,.\, \frac{100}{98{,}5} \text{ Pfd. Nickel} = \frac{213{,}2}{1218}$$

Man berechnet 12 000 : 985 = 12,18 und multipliciert diese Zahl mit den Procenten.

Zweites Buch.

Allgemeine Arithmetik.

§. 1. Grundbegriffe.

1. Zwei Dinge können in Hinsicht ihrer **Qualität** (Beschaffenheit) und **Quantität** (Größe) verglichen werden. In Ansehung ihrer Qualität sind sie **gleichartig**, wenn ganz oder teilweise eines für das andere gesetzt werden kann, **ungleichartig**, wenn dies nicht der Fall ist. In Ansehung ihrer Quantität heißen sie **Größen** und sind Gegenstand der **mathematischen** Wissenschaften.

Gleichartige Größen sind entweder **gleich** oder **ungleich**; von ungleichen Größen ist diejenige die größere, von welcher ein Teil der andern gleich ist. Das Urteil, daß die Größe A der Größe B gleich ist, daß eine für die andre gesetzt werden kann, wird eine **Gleichung** (aequatio) genannt, und $A = B$ bezeichnet. Die verglichenen Größen heißen die **Seiten** (linke und rechte, membra) der Gleichung. Daß die Größe C größer als die Größe D (D kleiner als C) ist, wird durch die **Ungleichung** $C > D$ bezeichnet. Daß die Größe C zwischen den Grenzen B und D liegt, mehr als jene und weniger als diese beträgt, wird durch die **Begrenzung** $B < C < D$ angegeben.

2. Die Menge gleichartiger Dinge wird durch eine **Zahl** bestimmt. Das mehrmal Vorzustellende heißt **Einheit** und ist entweder Eins ohne nähere Bestimmung (**unbenannt**, abstrakt), oder eine bestimmte Größe (**benannt**, konkret), z. B. Zehner, Dutzend, Thaler, Gulden, Fuß, Grad, Pfund, Stunde u. s. w. Eine Zahl ist größer als eine andere, wenn sie **mehr** Einheiten enthält, als die andere. Die unbenannten Zahlen bilden die ohne Ende aufsteigende **natürliche Zahlenreihe**. Um die natürlichen Zahlen mit wenig Wörtern und Zeichen (Ziffern) mitteilen zu können, haben die gebildeten Völker das **Decimalsystem** angenommen, nach welchem zehn Einer als ein Zehner, zehn Zehner als ein Hundert, zehn Hundert als ein Tausend, tausend Tausende als eine Million, million Millionen als eine Billion, million Billionen als eine Trillion u. s. f. betrachtet werden.

Die Griechen bezeichneten, wie die semitischen Völker, die Einer, Zehner, Hunderte durch je neun Buchstaben ihres Alphabets; die Tausende durch die Zeichen der Einer, denen Striche beigefügt wurden, die Zehntausende u. s. w. wiederum durch die Zeichen der Einer, Zehner u. s. w., denen der Name Myriaden hinzugefügt wurde. Die Abteilung großer Zahlen nach Myriaden ist von andern Völkern nicht nachgeahmt worden. Die Römer bezeichneten einen Einer, einen Zehner, ein Hundert, ein Tausend, ferner fünf Einer, fünf Zehner, fünf Hunderte durch Schriftzeichen,

welche später von gewissen Buchstaben des gemeinen Alphabets nicht mehr unterschieden wurden; vier und neun Einer wurden durch Eins vor fünf und zehn dargestellt u. s. w.

Diese Schreibarten sind seit dem 12ten Jahrhundert der christlichen Zeitrechnung durch die von den Arabern verbreitete indische Erfindung verdrängt, nach welcher die Einer durch besondere Zeichen, die Zehner durch ihren Ort zur Linken der Einer, die Hunderte, Tausende u. s. w. durch ihren Ort zur Linken der Zehner, Hunderte u. s. w. unter Einführung des zehnten Zahlzeichens 0 angegeben werden. Die Zahlwörter Million, Billion, . . , Milliarde (tausend Millionen) sind neuere Bildungen. Das Wort Million bedeutete im 16ten Jahrh. in der vulgären Sprache eine Geldsumme; als abstraktes Zahlwort hat es erst im 18ten Jahrh. in die Rechenbücher allgemeinen Eingang gefunden. Milliarde und Billion kommen in französischen Büchern des 16ten Jahrh. vor. Vergl. die Aufsätze des Verf. in den Leipz. Berichten 1865 und Im neuen Reich 1871 p. 617.

3. Die Zahlen und ihre Verbindungen sind Gegenstand der Arithmetik. Eine Zahlenverbindung ausführen (operieren) heißt rechnen. Zur Bezeichnung der auszuführenden Zahlenverbindungen sind bestimmte Rechnungszeichen eingeführt. Zahlen im allgemeinen, d. h. von unbestimmt viel Einheiten, werden durch verschiedene Buchstaben (große, kleine, nummerierte) bezeichnet, z. B.

A	B	C	.	.	
a	b	c	.	.	
α	β	γ	.	.	
a'	a''	a'''	.	.	$a^{(n)}$
a_1	a_2	a_3	.	.	a_n
a_{11}	a_{12}	a_{13}	.	.	a_{1n}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	.	.	a_{2n}

Daher nennt man die allgemeine Arithmetik auch Buchstabenrechnung (arithm. speciosa, universalis), im Gegensatz zur gemeinen Rechenkunst (logistica, arithm. numerosa), welche von jener eine Anwendung ist. Unter höherer Arithmetik (Zahlenlehre, théorie des nombres) versteht man die Lehre von den Eigenschaften der ganzen Zahlen und ganzzahligen Formen.

Bei Euclides werden allgemeine Zahlen durch Strecken bezeichnet, und Zahlenverbindungen durch Konstruktionen erläutert. Diophantus (in der zweiten Hälfte des 4ten Jahrh. n. Chr.) gebraucht die Anfangsbuchstaben unbestimmter Größen als Zahlzeichen, welche gegen den Anfang des Mittelalters numeri cossici (cossa, cosa, chose), später species genannt wurden. Deutlichere Anfänge der Buchstabenrechnung finden sich nach Einführung des indischen Algorithmus (Gem. Arithm. §. 14) bei Regiomontan 1460 (algorithmus demonstratus. Nürnberg 1534. Vergl. Chasles aperçu hist. p. 621 der deutschen Übers.), und Stifel (arithm. integra 1544 fol. 252), in größerer Ausdehnung bei Vieta in der zweiten Hälfte des 16ten Jahrh.

4. Die Sätze der mathematischen Wissenschaften sind entweder Definitionen, oder Theoreme, oder Axiome. Die Definition (ὁρισμός, Erklärung) dient zur Verständigung über einen zusammengesetzten Begriff. Ein Theorem (θεώρημα, Lehrsatz, Satz, propositio) knüpft an eine Voraussetzung (ὑπόθεσις) eine Behauptung (θέσις). Axiom (ἀξίωμα, Grundsatz, Hypothese) ist eine Behauptung, deren Anerkennung durch die

Summe der gemachten Wahrnehmungen (Erfahrung, ἐμπειρία) gefordert wird. Die gerühmte Richtigkeit der mathematischen Wissenschaften beruht darauf, daß sie eine äußerst geringe Anzahl von Axiomen enthalten, und daß ihre Theoreme sich (logisch) beweisen und (empirisch) prüfen lassen. Der **Beweis** (ἀπόδειξις, demonstratio) wird **direkt** geführt, wenn man aus der Voraussetzung durch Schlüsse die Behauptung ableitet; **indirekt** (apagogisch, ἀπαγωγή, deductio ad absurdum), wenn man aus der Verneinung der Behauptung durch Schlüsse die Verneinung der Voraussetzung ableitet. Die mathematischen **Schlüsse** (συλλογισμός): wenn $A = B$ und $B = C$ (praemissae), so ist $A = C$ (conclusio); wenn $A > B$, $B > C$, so ist $A > C$; Gleiches um Gleiches vermehrt oder vermindert giebt Gleiches, u. s. f., entspringen aus dem Begriff der Gleichheit (1). Nach ihrem Muster hat man seit Aristoteles auch für andre Gebiete Schlüsse zu bilden versucht (Logik).

Abgesehen von diesen aus dem Begriff der Gleichheit hervorgehenden Schlüssen bedarf der erste Teil der mathematischen Wissenschaften (Arithmetik, Algebra, Analysis) keiner Axiome, während die folgenden Teile (Geometrie und Mechanik) nicht ohne einige Axiome begründet werden können.

In den älteren Darstellungen bedeutet corollarium ein Theorem, welches einem andern untergeordnet und aus demselben leicht ableitbar ist; lemma (zu λαμβάνω) ein Theorem, welches einer andern Reihe angehörig zur Begründung eines Theorems vorausgeschickt wird.

§. 2. Die Summe*).

(Heis §. 1 und 7.)

1. Die Summe zweier Zahlen entsteht durch Hinzuzählen (Addition) der Einheiten der zweiten Zahl zu der ersten Zahl. Beide Zahlen heißen **Glieder** (termini, termes) der Summe. Die Summe der Zahlen a und b wird bezeichnet $a + b$, gelesen a plus b.

2. Die Glieder einer Summe können nicht anders als gleichbenannt sein, die Summe ist mit den Gliedern gleichbenannt.

3. Die Ordnung der Glieder einer Summe ist beliebig:

$$a + b = b + a$$

$$a + b + c = b + a + c = a + c + b$$

Denn die Reihe von a Einheiten, zu denen b Einheiten addiert worden,

$$\overbrace{1}^{1} + \overbrace{1}^{2} + \overbrace{1}^{3} + \ldots + \overbrace{1}^{a} + \overbrace{1}^{1} + \overbrace{1}^{2} + \overbrace{1}^{3} + \ldots + \overbrace{1}^{b}$$

*) Für den Zweck der Einübung sind bei den Paragraphen des zweiten und dritten Buchs die entsprechenden Paragraphen von Heis' Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra angegeben worden.

erscheint vom Ende aus als die Reihe von b Einheiten, zu denen a Einheiten addiert worden.

Die Summe $a + b + c$ erscheint nicht nur als Summe der Glieder $a + b$ und c, sondern auch als Summe der Glieder a und $b + c$, und ist daher gleichgeltend mit $b + a + c$ und $a + c + b$. Aus einer gegebenen Anordnung der Glieder lassen sich dadurch, daß man die Plätze von benachbarten Gliedern vertauscht, alle möglichen Anordnungen ableiten.

§. 3. Das Produkt.

(Beis §. 3 und 15, 8—16.)

1. Produkt heißt die Summe von gleichen Gliedern. Das mehrmal gesetzte Glied heißt Multiplikandus, die Anzahl der gleichen Glieder Multiplikator. Das Produkt der Zahlen a und b d. h. die Summe von b Gliedern, deren jedes a ist, wird bezeichnet ab oder $a \,.\, b$ oder $a \times b$, gelesen a multipliciert mit b oder $b$mal a. Das Multiplikationszeichen kann nicht fehlen, wenn der Multiplikator eine gemeine Zahl ist.

$$a \,.\, 2 = a + a$$
$$a \,.\, 3 = a + a + a$$
$$ab = \overset{1}{\underset{\smile}{a}} + \overset{2}{\underset{\smile}{a}} + \overset{3}{\underset{\smile}{a}} + \ldots + \overset{b}{\underset{\smile}{a}}$$

2. Ein Multiplikator kann nicht anders als unbenannt sein, das Produkt ist mit dem Multiplikandus gleichbenannt (§. 2, 2).

3. Multiplikandus und Multiplikator können ohne Änderung des Produkts vertauscht werden und heißen deshalb Faktoren des Produkts. Die Ordnung der Faktoren eines Produkts ist beliebig:

$$ab = ba$$
$$abc = bac = acb = \ldots$$
$$5 \times 3 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 3 \times 5$$
$$+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$
$$+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

Denn 3 Zeilen von je 5 Einheiten erscheinen von der Seite betrachtet als 5 Kolonnen von je 3 Einheiten. Ebenso sind c Zeilen von je b Gliedern a zugleich b Kolonnen von je c Gliedern und enthalten zusammen bc Glieder (§. 2, 3).

Man schreibt gewöhnlich $2a$, $3a$, . . statt $a \,.\, 2$, $a \,.\, 3$, . ., so daß $5a = 2a + 3a$ u. s. w. Um mit bc zu multiplicieren, kann man mit b multiplicieren und das Produkt wiederum mit c. Man findet $3a \,.\, 2b = 6ab$, u. s. w.

Wenn das Produkt von n Faktoren von der Anordnung der Operation unabhängig ist, so ist auch das Produkt von $n+1$ Faktoren $a, b, c, d, e, \ldots$ von der Anordnung der Operation unabhängig. Man führt dieses Produkt auf ein Produkt von n Faktoren dadurch zurück, daß man entweder a mit b, oder a mit einem andern Faktor c, oder ein anderes Paar Faktoren c mit d zu einem Produkt vereint. Nach der Voraussetzung findet man gleiche Produkte aus den Systemen von Faktoren

$ab, c, d, e, \ldots$ und $abc, d, e, \ldots$
$ac, b, d, e, \ldots$ und $acb, d, e, \ldots$
$a, b, cd, e, \ldots$ und $ab, cd, e, \ldots$
$ab, c, d, e, \ldots$ und $ab, cd, e, \ldots$

Nun ist $acb = abc$, folglich stimmen alle diese Produkte von n Faktoren überein, und das Produkt von $n+1$ Faktoren ist von der Anordnung der Operation unabhängig. Diese Unabhängigkeit findet aber bei 3 Faktoren statt, also auch bei 4, 5, . . Faktoren (Dirichlet Zahlentheorie von Dedekind §. 2).

§. 4. Die Potenz.

(Bis §. 5.)

Potenz heißt das Produkt von gleichen Faktoren. Der mehrmal gesetzte Faktor heißt Dignandus, die Anzahl der gleichen Faktoren Exponent. Dignandus, Exponent und Potenz können nicht anders als unbenannt sein. Die $b$te Potenz von a, d. h. das Produkt von b Faktoren, deren jeder a ist, wird bezeichnet a^b, gelesen a potenziert mit b, oder a zur $b$ten (Potenz), oder a hoch b. Die erste Potenz einer Zahl ist die Zahl selbst; die zweite Potenz der Zahl wird ihr Quadrat genannt, die dritte Kubus, die vierte Biquadrat. Coefficient einer Potenz heißt ein von dem Dignandus unabhängiger Faktor der Potenz oder das Produkt solcher Faktoren.

$$a^2 = aa, \quad a^3 = aaa, \quad a^5 = a^4a = a^3a^2$$

$$\overset{1}{\smile}\ \overset{2}{\smile}\ \overset{3}{\smile}\qquad \overset{b}{\smile}$$

$$a^b = a\ a\ a\ \ldots\ a$$

$$3a \,.\, 2a = 6a^2, \quad 2ab^2 \,.\, 7a^2b^3 = 14a^3b^5, \quad a^ba = a^{b+1}$$

Dignandus und Exponent können im allgemeinen nicht vertauscht werden. Es ist zwar $2^4 = 4^2$, aber 2^3 ist von 3^2 verschieden, u. s. w.

§. 5. Die indirekten Operationen.

(Bis §§. 2. 4. 41. 56.)

1. Wenn die Summe und ein Glied gegeben ist, so läßt sich das andere Glied bestimmen, indem man zu dem gegebenen Gliede ein hinreichendes Glied (Differenz) addiert.

2. Wenn das Produkt und ein Faktor gegeben ist, so läßt sich der andere Faktor bestimmen, indem man den gegebenen Faktor mit einem hinreichenden Faktor (Quotient) multipliciert.

3. Wenn die Potenz und der Exponent gegeben ist, so läßt sich der

Dignandus bestimmen, indem man eine hinreichende Zahl (Wurzel) mit dem gegebenen Exponenten potenziert.

Wenn die Potenz und der Dignandus gegeben ist, so läßt sich der Exponent bestimmen, indem man den Dignandus mit einer hinreichenden Zahl (Logarithmus) potenziert.

Auf das Potenzieren gründen sich zwei indirekte Operationen, weil Dignandus und Exponent nicht vertauschbar sind.

§. 6. Die Formeln.

(Bets §. 6.)

1. Formel (formula, forma) heißt eine Verbindung von Zahlen durch Rechnungszeichen, z. B. $a + b$, ab, a^b. Ein Produkt (Potenz) heißt einteilig (mononomium, verkürzt monomium); eine Summe heißt nach der Anzahl ihrer Glieder zweiteilig, dreiteilig, vielteilig (binomium, trinomium, polynomium).

2. Formeln werden wie einzelne Buchstaben durch Rechnungszeichen verbunden, nachdem man sie in Klammern eingeschlossen hat (παρέν-θεσις, Parentheſe). Zur Einschließung von Parentheſen gebraucht man Klammern von verschiedener Gestalt. Die Einschließung ist unnötig, wenn eine Summe zu addieren, ein Produkt zu multiplicieren ist (§. 2, 3 und §. 3, 3), z. B.

$$a + (b + c) = a + b + c,\quad (ab)c = a(bc) = abc$$

Bei Eucl. X, 37 wird die zweiteilige Formel $a + \sqrt{b}$ als ἐκ δύο ὀνομάτων (ex binis nominibus) bezeichnet; davon ist das Wort binomium gebildet, dessen besonderer Sinn bis ins 18te Jahrhundert sich erhalten hat. Die richtigeren Bildungen uninomium, multinomium haben keinen Eingang gefunden. Vieta (1580) machte über die zusammengehörigen Glieder Striche, wie sie noch bei den Wurzeln der mehrteiligen Formeln gebraucht werden. Der Gebrauch der Klammern, welche seit dem 17ten Jahrhundert (vergl. Klügel math. W. I. p. 52) vorkommen, ist im 18ten Jahrhundert allgemein geworden.

Die jetzt gebräuchlichen Rechnungszeichen sind sämtlich nach Erfindung des Bücherdrucks eingeführt worden. Das Gleichheitszeichen (=), welches zuerst Recorde 1552 gebraucht hat (vergl. Klügel math. W. I. p. 42), kam erst 100 Jahre später in allgemeinern Gebrauch. Das Ungleichheitszeichen ($<$) kommt im Anfange des 17ten Jahrhunderts bei Harriot vor (Klügel I. p. 50). Die Wörter plus und minus wurden in Italien und Frankreich zuerst durch die Anfangsbuchstaben p und m, in Deutschland aber schon in der zweiten Hälfte des 15ten Jahrhunderts durch $+$ und $-$ bezeichnet (vergl. Drobisch de Widmanni compendio 1489 edito 1840 p. 20). Diese Zeichen werden jedoch einem bestimmten Erfinder nicht zugeschrieben, und sind deshalb vielleicht nichts weiter als Deformation jener Buchstaben. Eine andere Ansicht über den Ursprung derselben Zeichen hat de Morgan (Athenaeum n. 1931 p. 565, 1864 Oct. 29) angedeutet.

Die Zusammenstellung der Faktoren eines Produkts ohne Rechnungszeichen findet sich bei Stifel arithm. 1544 fol. 225; das Multiplikationszeichen ($\times$) kommt bei Oughtred (clavis math. 1631), der Punkt bei Leibniz in der zweiten Hälfte des 17ten Jahrhunderts vor. Bei Diophantus und seinen Nachfolgern wird eine unbestimmte Zahl (die Unbekannte) ἀριθμος, res, cosa radix genannt; ihr Quadrat

δύναμις, potentia, potestas, census, censo infolge des alten Gebrauchs der Wörter δύναμις, δυνάσθαι (Eucl. El. X); ihre dritte Potenz κῦβος, cubus. Die höheren Potenzen führen zusammengesetztere Namen δυναμο-δύναμις u. s. f. Den Namen dignitas hat Bombelli 1572 gebraucht, während potestas und coefficiens durch Vieta üblich geworden ist. Die Bezeichnung der Potenzen ward durch Stifel vorbereitet, welcher der Reihe 1, 1A, 1AA, 1AAA, . . die Nummern 0, 1, 2, 3, . . überschrieb, die er Exponenten nannte (arithm. fol. 250 und in der Herausgabe von Christ. Rudolffs Coss. 1553 fol. 62). Nachdem Stevin 1585 (vergl. Klügel math. W. I. p. 43) die Benennung der Potenzen nach ihren Exponenten eingeführt hatte, wurde die jetzige Bezeichnung der Potenzen durch Herigogne (cursus math. Paris 1634) und Descartes 1637 verbreitet.

§. 7. Die Differenz.

(Beis §. 2.)

1. Die Differenz (Unterschied) zweier Zahlen ist die Zahl, zu welcher die zweite addiert die erste giebt. Die erste Zahl heißt Minuendus, die zweite Subtrahendus, so daß

Differenz + Subtrahendus = Minuendus.

Die Differenz von a und b wird bezeichnet $a - b$, gelesen a minus b. Die Berechnung einer Differenz heißt Subtraktion und kommt durch Abzählen der Einheiten des Subtrahenden vom Minuenden zu Stande. Um eine Differenz zu prüfen, hat man zu ihr den Subtrahenden zu addieren und die Summe mit dem Minuenden zu vergleichen. Insbesondere ist $a + b - b = a$, $a + b + c + d - (c + d) = a + b$, $5a - 3a = 2a$ u. s. f. Aus der Begrenzung $a < x < b$ schließt man, daß $x - a < b - a$.

2. Minuend und Subtrahend können nicht anders als gleichbenannt sein, die Differenz ist mit ihnen gleichbenannt und giebt an, um wieviel größer der Minuend ist als der Subtrahend.

3. Wenn der Minuend dem Subtrahenden gleich ist, so ist die Differenz 0 (Null, ziphra, zéro). Wenn der Minuend kleiner ist als der Subtrahend, so kann die Differenz in Form eines Subtrahenden (ohne Minuenden) angegeben werden, z. B.

$$7 - 7 = 0$$
$$7 - 8 = -1$$
$$7 - 9 = -2$$
$$a - (a + c) = -c$$
$$a - b = -(b - a)$$

weil von a nicht mehr als a subtrahiert werden kann, folglich $b - a$ zu subtrahieren bleibt.

Um alle Subtraktionen ohne Ausnahme ausführen zu können, setzt man die Reihe der natürlichen Zahlen rückwärts über Null fort durch Zahlen, welche das Zeichen der Subtrahenden (—) vor sich tragen

und negativ genannt werden, während die natürlichen Zahlen, denen zur Verdeutlichung des Gegensatzes das Additionszeichen (+) vorgesetzt werden kann, positiv heißen:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Die negativen Zahlen sind ebenso aus der negativen Einheit gebildet, als die positiven Zahlen aus der positiven Einheit. Die Differenz $a - b$ wird erreicht, wenn man in dieser Reihe von Null an a Glieder vorwärts (rechts) und von da an b Glieder rückwärts geht.

Die positiven Zahlen betragen mehr als Null. Von den negativen Zahlen muß gesagt werden, daß sie weniger als Null betragen, weil eine Differenz abnimmt, wenn ihr Subtrahend wächst, z. B.

$$7 - 6,\ 7 - 7,\ 7 - 8, \ldots$$

bilden eine Reihe von mehr und mehr abnehmenden Gliedern. Aus dem Obersatze $-5 < 0$ leitet man durch Addition von 5 den richtigen Schlußsatz $0 < 5$ ab.

4. Eine Differenz kann als eine Summe betrachtet werden, von welcher ein Glied negativ (ein Subtrahend) ist. Demnach wird das Binomium $a + (-b)$ durch die Differenz $a - b$ erklärt. Denselben Wert hat $-b + a$, weil $-b + a + b = -b + b + a = a$.

Zwei Zahlen heißen entgegengesetzt gleich, wenn die eine soviel negative Einheiten als die andere positive hat, mithin ihre Summe 0 ist, z. B. 1 und -1, c und $-c$, $a - b$ und $b - a$ oder $-a + b$.

Zwei Größen heißen entgegengesetzt, wenn eine einem Teil der andern entgegengesetzt gleich ist, mithin ihre durch Subtraktion gebildete Summe kleiner ist als die größere von beiden Größen. Z. B. eine positive und eine negative Zahl (von entgegengesetzten Zeichen), Vermögen und Schulden, Gewinn und Verlust, Fortschritt und Rückschritt, Hebung und Senkung, Beschleunigung und Verzögerung, Abstoßung und Anziehung, Pressung und Spannung u. s. w.

Wer a Thaler besitzt und b Thaler schuldet, hat $a - b$ Thaler Vermögen d. h. entweder $a - b$ Thaler wirkliches Vermögen, wenn $a - b$ positiv, oder kein Vermögen, wenn $a - b$ null, oder $b - a$ Thaler Schulden, wenn $a - b$ negativ ist. Schulden lassen sich also als negatives Vermögen und umgekehrt Vermögen als negative Schulden in Rechnung bringen.

Ein Punkt, der von einem gegebenen Punkte aus $a - b$ Fuß vorwärts gelegen ist, liegt entweder wirklich vorwärts von dem gegebenen Punkte aus, oder auf dem gegebenen Punkte selbst, oder rückwärts von demselben, je nachdem $a - b$ positiv, null, negativ ist. Negativer Fortschritt ist Rückschritt. U. s. f.

§. 8. Summe und Differenz von Polynomien.

(Bei §§. 8–13.)

1. Um von einer Summe eine Zahl zu subtrahieren, kann man von einem ihrer Glieder dieselbe subtrahieren.

$$a + b - c = a + (b - c) = a - c + b$$

Beweis. Wenn man zu $a + (b - c)$ oder zu $a - c + b$ den Subtrahenden c addiert, indem man mit $b - c + c = b$ oder mit $a - c + c = a$ beginnt (§. 2, 3), so erhält man $a + b$, den Minuenden (§. 7, 1).

Umgekehrt: Eine Differenz wird addiert, indem man den Minuenden addiert und den Subtrahenden subtrahiert in beliebiger Ordnung.

2. Um eine Summe zu subtrahieren, hat man ihre einzelnen Glieder zu subtrahieren. Um eine Differenz zu subtrahieren, hat man den Minuenden zu subtrahieren und den Subtrahenden zu addieren.

$$a - (b + c) = a - b - c$$
$$a - (b - c) = a - b + c$$

Beweis. Wenn man zu $a - b - c$ den Subtrahenden $b + c$ addiert, indem man mit $a - b - c + c = a - b$ beginnt, so erhält man a, den Minuenden, weil $a - b + b = a$.

Wenn man zu $a - b + c$ den Subtrahenden $b - c$ addiert, indem man erst c subtrahiert, dann b addiert (1), so erhält man a, den Minuenden.

Daher ist auch $-4a + 7a = 3a$, $-5a + 2a = -3a$, $-4a - 3a = -7a$.

3. Um ein Polynomium (Summe oder Aggregat von positiven und negativen Gliedern) zu addieren, addiert man in beliebiger Ordnung seine einzelnen Glieder (ohne Änderung der Zeichen). Um ein Polynomium zu subtrahieren, addiert man seine einzelnen Glieder mit den entgegengesetzten Zeichen (die positiven mit dem Zeichen —, die negativen mit dem Zeichen +).

$a + (b - c + d) = a + (b - c) + d = a + b - c + d$ (1). Ein zu addierendes Polynomium braucht also nicht in Klammern geschlossen zu werden. Dagegen ist (2)

$$a - (b - c + d) = a - (b - c) - d$$
$$= a - b + c - d$$

Dem Binomium (Summe) wurde im Altertum ἀποτομή, recisum, residuum (Differenz) gegenübergestellt; die Differenzen wurden in Excesse und Defekte unterschieden. Die Einführung der negativen Zahlen zur Beseitigung dieser Unterscheidung bildet einen wesentlichen Fortschritt der Neuern, welcher fast zugleich mit der Einführung der Buchstabenrechnung im 16ten Jahrh. begonnen und im 17ten Jahrh.

vollendet wurde. Vergl. Klügel math. W. I. p. 30 ff. Die Ausdrücke numerus verus und fictus (falsus) kommen bei Cardano u. a. vor, die Benennungen affirmativ (positiv) und negativ bei Vieta. Aggregat bedeutet noch bei Vieta nur eine Summe von positiven Gliedern. Die Bezeichnung eines positiven oder negativen Wertes durch einen und denselben Buchstaben kommt bei Descartes (Geom. 1637) vor; den Nutzen dieser Bezeichnung mußte noch Newton für Leibniz ausdrücklich hervorheben (Brief an Leibniz 1676 Okt. 24).

§. 9. Produkt von Polynomien.

(Bis §§. 14–16.)

1. Um ein Polynomium zu multiplicieren, hat man seine einzelnen Glieder zu multiplicieren:

$$(a - b + c)m = am - bm + cm$$

Beweis. Die Summe von m Gliedern, deren jedes $a - b + c$ ist, hat m Glieder, deren jedes a, ferner m Glieder, deren jedes $-b$, endlich m Glieder, deren jedes c ist (§. 3, 1. §. 8, 3).

2. Um mit einem Polynomium zu multiplicieren, hat man mit seinen einzelnen Gliedern zu multiplicieren. Die einzelnen Produkte erhalten die Zeichen der Glieder, mit denen man multipliciert.

Beweis.
$$\begin{aligned} m(a - b + c) &= (a - b + c)m \text{ nach §. 3, 3.} \\ &= am - bm + cm \quad (1) \\ &= ma - mb + mc \end{aligned}$$

Anm. Ein Multiplikator kann an sich weder positiv, noch negativ sein (§. 3, 2). Mit einer positiven oder negativen Zahl multiplicieren sagt man abkürzend für „multiplicieren mit der unbezeichneten (absoluten) Zahl und das Produkt addieren oder subtrahieren".

3. Um ein Polynomium mit einem Polynomium zu multiplicieren, hat man die einzelnen Glieder des einen mit jedem Gliede des andern zu multiplicieren. Faktoren von einerlei Zeichen geben ein positives, von entgegengesetzten Zeichen ein negatives Produkt*).

Beweis.
$$\begin{aligned} (a - b)(c - d) &= (a - b)c - (a - b)d \text{ nach (2)} \\ &= ac - bc - (ad - bd) \text{ nach (1)} \\ &= ac - bc - ad + bd \text{ nach §. 8, 2.} \end{aligned}$$

Die Produkte $+ac$, $-bc$, $-ad$, $+bd$ kann man ansehen als entstanden aus den Multiplikationen von $+a$ mit $+c$, $-b$ mit $+c$, $+a$ mit $-d$, $-b$ mit $-d$ (2, Anm.).

Man findet

$$\begin{aligned} (a - b)(c - d) &= -(b - a)(c - d) \\ &= -(a - b)(d - c) \\ &= (b - a)(d - c) \end{aligned}$$

*) Diese Regel wird schon im Altertum namentlich bei Diophantus (Arithm. I. def. 9) angewendet. Man hatte sie aus Eucl. El. II. abgeleitet.

übereinstimmend mit der für die Zeichen der Produkte abgeleiteten Regel. Man findet ferner

$$(a + b)(c + d) + (a - b)(c - d) = 2ac + 2bd$$
$$(a + b)(c + d) - (a - b)(c - d) = 2ad + 2bc$$

4. Umgekehrt: Die Glieder eines Polynomium, welche Produkte sind mit einem gemeinschaftlichen Faktor, lassen sich vereinigen, indem man denselben vor eine Parenthese setzt, in der die nicht gemeinschaftlichen Faktoren mit den Zeichen der einzelnen Glieder oder mit den entgegengesetzten Zeichen stehen, je nachdem der gemeinschaftliche Faktor das Zeichen + oder − hat.

$$a + bd - cd = a + d(b - c) = a - d(-b + c)$$
$$ac - bc - da + bd = c(a - b) - d(a - b)$$
$$= (a - b)(c - d)$$

Wenn zwei Polynomien nach fallenden Potenzen eines Buchstabens geordnet sind, so kann ihr Produkt als ein nach fallenden Potenzen desselben Buchstabens geordnetes Polynomium dargestellt werden.

$$\begin{aligned}
&(ax^3 + bx^2 + cx + d)(fx^2 + gx + h)\\
&= afx^5 + bfx^4 + cfx^3 + dfx^2\\
&\quad + agx^4 + bgx^3 + cgx^2 + dgx\\
&\quad + ahx^3 + bhx^2 + chx + dh\\
&= afx^5 + (bf + ag)x^4 + (cf + bg + ah)x^3\\
&\quad + (df + cg + bh)x^2 + (dg + ch)x + dh
\end{aligned}$$

Hierin ist die Anleitung zur Multiplikation mehrziffriger Decimalzahlen enthalten, weil $ax^3 + bx^2 + cx + d$ eine Decimalzahl bedeutet, wenn $x = 10$ und a, b, c, d Zahlen aus der Reihe 0, 1, 2, .., 9 sind.

5. Bemerkenswerte Beispiele:

I. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$\begin{aligned}
(a + b)^3 &= (a + b)^2(a + b)\\
&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\\
(a + b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4
\end{aligned}$$

u. s. w. Die Entwickelung der Potenzen von $a - b$ erhält man, wenn man b mit $-b$ vertauscht, wodurch b^2, b^4, .. nicht verändert, aber b^3, b^5, .. negativ werden, so daß Reihen von Gliedern mit abwechselnden Zeichen entstehen.

II. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

u. s. w. Das Quadrat eines Polynomium besteht aus der Summe der Quadrate der einzelnen Glieder und der doppelten Produkte aus je zwei Gliedern. Die Zeichen der doppelten Produkte sind durch die Zeichen der Glieder bestimmt, aus denen sie gebildet werden (3).

III. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$(a^2 + ab + b^2)(a - b) = a^3 - b^3$

$(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)(a - b) = a^4 - b^4$

u. s. w. Durch Vertauschung von b mit $-b$ erhält man

$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

$(a^2 - ab + b^2)(a + b) = a^3 + b^3$

$(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)(a + b) = a^4 - b^4$

IV. Wenn $x + y = u$, $xy = v$, so ist

$x^2 + y^2 = u^2 - 2v$

$x^3 + y^3 = u^3 - 3uv$

$x^4 + y^4 = u^4 - 4u^2v + 2v^2$

$x^5 + y^5 = u^5 - 5u^3v + 5uv^2$

$x^6 + y^6 = u^6 - 6u^4v + 9u^2v^2 - 2v^3$

u. s. w. Denn es ist

$x^2 + y^2 = (x + y)(x + y) - 2xy$

$x^3 + y^3 = (x^2 + y^2)(x + y) - (x + y)xy$

$x^4 + y^4 = (x^3 + y^3)(x + y) - (x^2 + y^2)xy$

u. s. w. Ähnliche Gleichungen erhält man, wenn man y mit $-y$, folglich v mit $-v$ vertauscht.

V. $(a^2 + nb^2)(a_1{}^2 + nb_1{}^2) = (aa_1 + nbb_1)^2 + n(ab_1 - a_1b)^2$

$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a_1{}^2 + b_1{}^2 + c_1{}^2 + d_1{}^2)$

$= (aa_1 + bb_1 + cc_1 + dd_1)^2 + (ab_1 - a_1b + cd_1 - c_1d)^2$

$+ (ac_1 - a_1c + db_1 - d_1b)^2 + (ad_1 - a_1d + bc_1 - b_1c)^2$

Diese Produkte haben dieselbe Form, wie ihre Faktoren.

§. 10. Der Quotient.

(Seis §§. 17. 20.)

1. Der Quotient zweier Zahlen ist die Zahl, welche mit der zweiten multipliciert die erste giebt. Die erste Zahl heißt Dividendus, die zweite Divisor, so daß

Quotient × Divisor = Dividendus.

Der Quotient von a und b wird bezeichnet $\frac{a}{b}$ oder $a : b$*), gelesen a durch b (dividiert) oder das Verhältnis von a zu b oder b in a (divi-

*) Über die griechische Bezeichnung der Brüche vergl. Nesselmann Gesch. d. Algebra p. 114. Der Bruchstrich scheint zugleich mit den indischen Ziffern eingeführt worden zu sein; man findet ihn bei Leonardo von Pisa (liber abaci, fol. 11). Das Kolon diente bei den Engländern im 17ten Jahrh. als Trennungszeichen; der jetzige Gebrauch desselben rührt von Leibniz her. Das Pellsche Zeichen ÷ welches dem Dividendus nachgesetzt wurde, kommt in England bis ins 18te Jahrh. vor.

diert). Die Berechnung eines Quotienten heißt Division. Um den Quotienten $a : b$ zu bilden, hat man die Vielfachen des Divisor, b, $2b$, $3b$, . . mit dem Dividenden zu vergleichen. Um den Quotienten zu prüfen, hat man ihn mit dem Divisor zu multiplicieren und das Produkt mit dem Dividenden zu vergleichen. Insbesondere ist

$$\frac{a}{a} = 1, \quad \frac{ab}{b} = a, \quad \frac{abcd}{cd} = ab, \quad \frac{a^5}{a^3} = a^2$$

2. Wenn der Dividend benannt ist, so muß der Divisor entweder unbenannt oder gleichbenannt sein. Im ersten Falle ist der Quotient der sovielte Teil des Dividenden, als der Divisor angiebt, also mit dem Dividenden gleichbenannt. Im zweiten Falle ist der Quotient das Verhältnis*) des Dividenden zum Divisor d. h. die Zahl (unbenannt), welche angiebt, wievielmal der Divisor im Dividenden enthalten ist, wievielmal so groß der Dividend ist als der Divisor.

28 Thaler : 4 = 7 Thaler, weil 7 Thlr. $\times$ 4 = 28 Thaler; der 4te Teil von 28 Thalern beträgt 7 Thaler.

28 Thaler : 4 Thaler = 7, weil 4 Thaler $\times$ 7 = 28 Thaler; das Verhältnis von 28 Thalern zu 4 Thalern ist 7, d. h. 4 Thaler sind in 28 Thalern 7mal enthalten oder 28 Thaler sind 7mal soviel als 4 Thaler.

Wenn a und b unbenannt sind, so kann $a : b$ sowohl den $b$ten Teil von a als auch das Verhältnis von a zu b bedeuten.

3. Wenn der Dividend a einem Vielfachen des Divisor b nicht gleich ist, so läßt sich der Quotient $a : b$ durch natürliche Zahlen nicht genau angeben, sondern nur begrenzen, z. B.

$$3 < 22 : 7 < 4$$

d. h. 22 : 7 liegt zwischen 3 und 4, weil 22 zwischen 3 . 7 und 4 . 7 liegt.

Liegt a zwischen den Grenzen bx und $b(x + 1)$, so fällt der Quotient $a : b$ zwischen x und $x + 1$, und x heißt die ganze Zahl des Quotienten $a : b$, die Differenz $a - bx$ heißt der Rest dieser Division. Wenn a näher an $b(x + 1)$ als an bx liegt, so ist der Quotient näher $x + 1$ als x; nimmt man nun $x + 1$ als die genauere ganze Zahl des Quotienten, so nennt man die negative Zahl $a - b(x + 1)$ den kleinsten Rest der Division. Wenn der Rest 0 ist, so ist x der genaue Quotient und man sagt, die Division geht auf, a ist durch b teilbar (ohne Rest).

Überhaupt wenn $a = bx + y$ ist, so kann man x als die ganze Zahl und y als den Rest der Division $a : b$ betrachten.

---

*) λόγος, ratio, proportio, rapport.

4. Um alle Divisionen ohne Ausnahme ausführen zu können, denkt man eine Einheit (deren Vielheiten die natürlichen Zahlen sind) in soviel gleiche Teile geteilt, als der Divisor angiebt. Ein solcher Teil $\frac{1}{b}$ ist eine gebrochene Einheit, eine Mehrzahl derselben heißt eine gebrochene Zahl, ein Bruch (fractio). Die Anzahl der gebrochenen Einheiten eines Bruches heißt der Zähler (numerator), die Anzahl der Teile, in welche eine natürliche Einheit gebrochen ist, der Nenner (denominator) des Bruches. Im Gegensatz zu den Brüchen werden die natürlichen Zahlen ganz (integer) genannt. Die Summe einer ganzen und einer gebrochenen Zahl heißt eine gemischte Zahl.

Jeder Quotient läßt sich als Bruch darstellen, dessen Nenner der Divisor, dessen Zähler der Dividend ist:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b}a$$

(Die Einschließung von $\frac{1}{b}$ in Klammern ist überflüssig.) Denn wenn man $\frac{1}{b}a$ mit dem Divisor b multipliciert, indem man mit $\frac{1}{b}b = 1$ beginnt, so erhält man a, den Dividenden.

Der Bruch heißt uneigentlich, wenn der Zähler ein Vielfaches des Nenners, echt (genuina), wenn der Zähler kleiner als der Nenner, unecht (spuria), wenn der Zähler größer als der Nenner. Der uneigentliche Bruch ist einer ganzen Zahl gleich, der echte Bruch beträgt weniger als 1, der unechte Bruch beträgt mehr als 1.

§. 11. Quotient von Produkten.

(Beis §§. 21. 22. 18. 23. 24.)

1. Um durch ein Produkt zu dividieren, kann man durch seine Faktoren nach einander dividieren:

$$\frac{a}{bc} = \frac{a}{b} : c = \frac{a}{c} : b$$

Beweis. Wenn man den Quotienten $\frac{a}{b} : c$ mit dem Divisor bc multipliciert d. h. $\frac{a}{b} : c$ mit c und das Produkt $\frac{a}{b}$ mit b (§. 3, 3), so erhält man a, den Dividenden (§. 10, 1). Denselben erhält man, wenn man $\frac{a}{c} : b$ mit b und das Produkt mit c multipliciert.

Umgekehrt: Um einen Bruch zu dividieren, multipliciert man den Nenner.

2. Der Wert eines Bruches bleibt unverändert, wenn man seinen Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliciert oder dividiert.

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n}$$

Beweis. $$\frac{am}{bm} = \frac{am}{m} : b\,(1) = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a:n}{b:n} = \frac{(a:n)n}{(b:n)n} = \frac{a}{b}$$

3. Um ein Produkt zu dividieren, kann man einen Faktor desselben dividieren:

$$\frac{ab}{c} = \frac{a}{c}b = \frac{b}{c}a$$

Beweis. Wenn man $\frac{a}{c}b$ mit dem Divisor c d. h. $\frac{a}{c}$ mit c und das Produkt mit b multipliciert, so erhält man ab, den Dividenden. Denselben erhält man, wenn man $\frac{b}{c}a$ mit c d. h. $\frac{b}{c}$ mit c und das Produkt mit a multipliciert.

Umgekehrt: Um einen Bruch zu multiplicieren, multipliciert man den Zähler.

4. Mit einem Bruche multiplicieren sagt man abkürzend für dividieren durch seinen Nenner und multiplicieren mit seinem Zähler, wobei die Ordnung der Operationen beliebig ist. Mit $\frac{b}{c}$ multiplicieren heißt den $c$ten Teil $b$mal setzen oder das $b$fache durch c dividieren.

$$a\frac{b}{c} = \frac{a}{c}b = \frac{ab}{c} = \frac{b}{c}a$$

Die 3 letzten Formeln stimmen überein nach (3).

Ein Multiplikator kann an sich nicht gebrochen sein (§. 3, 2). Die Ordnung der Faktoren eines Produkts ist auch dann beliebig, wenn Faktoren Brüche sind.

5. Um einen Bruch mit einem Bruche zu multiplicieren, multipliciert man den Zähler mit dem Zähler, den Nenner mit dem Nenner:

$$\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

Beweis. $\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b}c\right) : d$ (4). Nun ist $\frac{a}{b}c = \frac{ac}{b}$ (3) und $\frac{ac}{b} : d = \frac{ac}{bd}$ (1).

6. Um durch einen Bruch zu dividieren, multipliciert man mit dem reciproken (umgekehrten) Bruche, welcher durch die Vertauschung von Nenner und Zähler entsteht:

$$a : \frac{b}{c} = a\frac{c}{b}$$

Beweis. Wenn man $a\frac{c}{b}$ mit dem Divisor $\frac{b}{c}$ multipliciert (4), so erhält man $\frac{acb}{bc}$ (5) $= a$, den Dividenden.

7. Zwei Zahlen heißen reciprok, eine die Reciproke der andern, wenn ihr Produkt 1 ist. Eine derselben wird gefunden, indem man 1 durch die andere dividiert. Z. B. a und $\frac{1}{a}$, $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$ sind reciprok; die Reciproke eines echten Bruches ist ein unechter Bruch. Kleinheit und Größe, Nähe und Ferne, Langsamkeit und Geschwindigkeit u. dgl. können als reciprok betrachtet werden. Wenn A $n$mal so klein, so nahe, so langsam ist als B, so ist A auch $\frac{1}{n}$mal (den $n$ten Teil) so groß, so fern, so geschwind als B.

8. I. Wenn bei unverändertem Zähler der Nenner des Bruches hinreichend groß wird, so wird der Bruch beliebig klein d. h. kleiner als jede gegebene Zahl. Wenn der Nenner unendlich wird (∞ nach Wallis u. a.) d. h. jede beliebige Zahl übersteigt, so erreicht der Bruch die Grenze (limes) 0.

II. Wenn bei unverändertem Zähler der Nenner des Bruches verschwindet, d. h. durch fortgesetzte Abnahme null wird, so wird der Bruch unendlich. Denn Division durch einen echten Bruch ist Multiplikation mit einem unechten Bruche (6).

III. Wenn Zähler und Nenner eines Bruches zugleich verschwinden oder unendlich werden, und wenn von den Faktoren eines Produkts der eine verschwindet, während der andere unendlich wird, so ist der Bruch und das Produkt im allgemeinen unbestimmt. Denn es giebt unbestimmt viel verschiedene Werte, welche mit einem verschwindenden Faktor multipliciert verschwinden; und die Multiplikation mit einer ohne Ende wachsenden Zahl ist gleichbedeutend mit der Division durch eine verschwindende Zahl. Wenn aber der Zähler und der Nenner des Bruches

oder die Faktoren des Produkts ihre besonderen Werte dadurch erhalten, daß einem in ihnen vorkommenden Buchstaben ein besonderer Wert beigelegt wird, so läßt sich in jedem gegebenen Falle die Grenze angeben, welche der Bruch oder das Produkt erreicht, z. B. bei $b = a$ wird

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = 2a$$

weil überhaupt $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

IV. Wenn bei unverändertem Dignanden der Exponent einer Potenz unendlich wird, so erreicht die Potenz die Grenze ∞ oder 0, je nachdem der Dignand mehr oder weniger als 1 ist.

Beweis. Nach §. 9, 5 hat man

$$a^n - 1 = (a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1)(a - 1)$$

Unter der Voraussetzung $a > 1$ ist $a^2 > 1$, u. s. f. daher

$$a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1 > n$$

$$a^n > 1 + n(a - 1)$$

Bei hinreichend großem n übersteigt $n(a - 1)$, also auch a^n jede gegebene Zahl. Dagegen ist

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} \text{ (5)} < \frac{1}{1 + n(a - 1)}$$

beliebig klein bei hinreichend großem n (I).

V. Wenn der Exponent einer Potenz unendlich wird, während der Dignand die Grenze 1 erreicht, so kann die Potenz auch eine andere Grenze als ∞ oder 0 erreichen. Diese Grenze läßt sich in jedem gegebenen Falle berechnen (§. 31).

§. 12. Quotient von Polynomien.

(Beis §§. 19. 25. 26.)

1. Um ein Polynomium zu dividieren, hat man seine einzelnen Glieder zu dividieren:

$$\frac{a - b + c}{d} = \frac{a}{d} - \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$$

Beweis. Wenn man $\frac{a}{d} - \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$ mit dem Divisor d multipliciert (§. 9, 1), so erhält man $\frac{a}{d}d - \frac{b}{d}d + \frac{c}{d}d = a - b + c$, den Dividenden.

Anmerkung. $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}, \quad \frac{a-b}{c-d} = \frac{b-a}{d-c}$$

wie man durch Multiplikation des Quotienten mit dem Divisor nach (§. 9, 3) beweisen kann.

Die Grenze, welche $\frac{ab}{a+b}$ erreicht, wenn b unendlich wird, ergiebt sich, nachdem man den Zähler und den Nenner durch b dividiert hat. Nach §. 11, 2 ist

$$\frac{ab}{a+b} = \frac{a}{\frac{a}{b}+1}$$

Wenn nun b unendlich wird, so verschwindet $\frac{a}{b}$ (§. 11, 8), und der gegebene Bruch nimmt den Wert a an. Ebenso findet man für

$$\frac{a+bx+cx^2}{f+gx+hx^2}$$

bei unendlich großem x den Wert $\frac{c}{h}$, nachdem man den Zähler und den Nenner durch x^2 dividiert hat.

Für $\frac{a^n-1}{a-1}$ ergiebt sich bei $a=1$ der Wert n (§. 11, 8. IV).

2. Umgekehrt: Brüche von einerlei Nenner lassen sich in einen Bruch desselben Nenners vereinigen, dessen Zähler ein Polynomium ist, bestehend aus den einzelnen Zählern mit den Zeichen der Brüche oder mit den entgegengesetzten Zeichen, je nachdem der zu bildende Bruch das Zeichen + oder − hat.

$$\frac{a}{d} - \frac{b}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a-b+c}{d} = -\frac{-a+b-c}{d}$$

Die gemischte Zahl $a + \frac{b}{c}$ läßt sich einrichten in den Bruch $\frac{ac+b}{c}$, nachdem man $\frac{ac}{c}$ für a gesetzt hat.

3. Brüche von verschiedenen Nennern lassen sich vereinigen, nachdem man ihnen nach §. 11, 2 einen gemeinschaftlichen Nenner (Generalnenner) gegeben hat. Wenn die einzelnen Nenner gemeinschaftliche Faktoren nicht haben, so ist ihr Produkt der kleinste unter den mög-

lichen Generalnennern. Sind z. B. p, q, r die einzelnen Nenner, so ist pqr der Generalnenner, welchen die Brüche annehmen, indem man ihre Zähler und Nenner der Reihe nach mit qr, pr, pq multipliciert. Wenn in mehrern Nennern derselbe Faktor oder Potenzen desselben vorkommen, so hat man in das zu bildende Produkt von diesem Faktor nur die höchste Potenz aufzunehmen, welche in den einzelnen Nennern anzutreffen ist. Sind z. B. p^2q, q^2r, pr^2 die einzelnen Nenner, so ist $p^2q^2r^2$ der Generalnenner, welchen die Brüche erhalten, indem man ihre Zähler und Nenner der Reihe nach mit qr^2, p^2r, pq^2 multipliciert.

Anm. Um Brüche von verschiedenen Nennern zu vergleichen, bilde man ihre Differenz oder ihren Quotienten. Wenn die Differenz des ersten und zweiten Bruches positiv, oder der Quotient des ersten und zweiten Bruches unecht ist, so ist der erste Bruch größer als der zweite, z. B.

$$\frac{a+m}{b+m} - \frac{a}{b} = \frac{(a+m)b - (b+m)a}{(b+m)b} = \frac{(b-a)m}{(b+m)b}$$

$$\frac{a+m}{b+m} : \frac{a}{b} = \frac{ab+bm}{ab+am}$$

Jene Differenz ist positiv und dieser Quotient unecht, wenn $a < b$ und m positiv ist; folglich ist

$$\frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}, \text{ wenn } a < b \text{ und } m \text{ positiv ist.}$$

4. Um durch ein Polynomium zu dividieren, kann man nicht durch die einzelnen Glieder desselben dividieren. Der Quotient würde mit dem vollständigen Divisor multipliciert ein Produkt geben, welches von dem Dividenden verschieden ist.

Eine gliedweise Entwickelung des Quotienten wird ermöglicht*), wenn man den Dividenden wie den Divisor nach der Reihe der in ihren Gliedern vorkommenden Potenzen desselben Buchstabens ordnet; entweder beide nach den fallenden Potenzen des Buchstabens, so daß die Glieder voranstehen, welche die höchsten Potenzen enthalten, oder beide nach den steigenden Potenzen des Buchstabens. Das erste Glied des Dividenden durch das erste Glied des Divisor dividiert giebt dann das erste Glied des Quotienten, dessen Produkt mit dem vollständigen Divisor von dem vollständigen Dividenden subtrahiert eine Differenz giebt, welche ein Rest heißt. Das erste Glied dieses Restes durch das

*) Die Einführung derselben trifft mit der Erfindung der Buchstabenrechnung zusammen. Die von den Arabern ausgebildete Division einer mehrstelligen Decimalzahl durch eine andere diente zum Vorbild.

erste Glied des Divisor dividiert giebt das zweite Glied des Quotienten, dessen Produkt mit dem vollständigen Divisor von dem Rest subtrahiert einen neuen Rest giebt, der wie der vorige Rest behandelt wird.

Wenn man zu dem Rest 0 gelangt, so ist der Quotient vollständig gefunden und man sagt, daß die Division aufgeht; denn das Produkt des vollständigen Divisor mit allen Gliedern des Quotienten wurde vom Dividenden nach und nach subtrahiert, wobei die Differenz 0 sich ergeben hat.

Wenn die Division nicht aufgeht, so wird sie nach Entwickelung einer hinreichenden Anzahl von Gliedern des Quotienten abgebrochen, und man erhält als vollständigen Quotienten eine gemischte Zahl, indem man den Quotienten des zuletzt behaltenen Restes durch den vollständigen Divisor als Bruch den gefundenen Gliedern des Quotienten hinzufügt.

Beweis. Wenn A den Dividenden, B den Divisor, C die gefundenen Glieder des Quotienten, R den zuletzt behaltenen Rest bedeutet, so ist $R = A - BC$, und $A = BC + R$, folglich (1)

$$\frac{A}{B} = C + \frac{R}{B}$$

Beispiel. Um $12x^2 + 54y^2 + 48yz - 51xy - 24xz$ durch $4x - 9y - 8z$ zu dividieren, ordnet man den Dividenden und Divisor beide nach den fallenden Potenzen eines Buchstabens z. B. x wie folgt:

$$\begin{array}{rl} 12x^2 - 51xy - 24xz + 54y^2 + 48yz & : 4x - 9y - 8z \\ \underline{12x^2 - 27xy - 24xz} & = 3x - 6y \\ - 24xy \quad + 54y^2 + 48yz & \\ \underline{- 24xy \quad + 54y^2 + 48yz} & \\ 0 & \end{array}$$

Das erste Glied des Quotienten findet man aus $12x^2 : 4x$, den ersten Rest durch Subtraktion des Produkts $3x(4x - 9y - 8z)$ vom Dividenden; das zweite Glied des Quotienten aus $-24xy : 4x$, den zweiten Rest durch Subtraktion des Produkts $-6y(4x - 9y - 8z)$ vom Dividenden. Dieser Rest ist 0, also geht die Division auf und der vollständige Quotient ist $3x - 6y$.

Bei den nicht aufgehenden Divisionen durch
$a + bx$, $a + bx + cx^2$, $a + bx + cx^2 + dx^3$, . .
erhält man unendliche Reihen von Gliedern mit steigenden Potenzen von x. Jedes Glied einer solchen Reihe kann in dem ersten Falle aus dem vorhergehenden Gliede, in den andern Fällen aus den 2, 3, . . vorhergehenden Gliedern nach einem von der Stelle des Gliedes unabhängigen Gesetz berechnet werden. Deshalb heißen solche Reihen recurrente (nach Moivre Miscell. analyt. 1730). Und wenn eine Reihe recurrent ist, so läßt sich der Bruch angeben, aus dem sie hervorgeht. Vergl. Euler Introd. I. Klügel math. W. 4 p. 324. Cauchy Anal. algébr. c. 12.

5. Bemerkenswert ist die aufgehende Division (§. 9, 5)

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}$$

und die nicht aufgehende Division

$$\frac{a^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1} + \frac{b^n}{a - b}$$

welche aus der vorigen folgt, weil (1)

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = \frac{a^n}{a - b} - \frac{b^n}{a - b}$$

Indem man b mit $-b$ vertauscht, erhält man für die Quotienten $\frac{a^n - (-b)^n}{a + b}$, $\frac{a^n}{a + b}$ Reihen von Gliedern mit abwechselnden Zeichen. Die Summe $a + b$ geht entweder in $a^n - b^n$ oder in $a^n + b^n$ auf. Wenn $a = 1$ ist, so findet man*)

$$\frac{1 - b^n}{1 - b} = \frac{b^n - 1}{b - 1} = 1 + b + b^2 + \ldots + b^{n-1}$$

$$\frac{1}{1 - b} = 1 + b + b^2 + \ldots + b^{n-1} + \frac{b^n}{1 - b}$$

Insbesondere, wenn $b < 1$ und n unendlich wächst, so verschwindet b^n und $\frac{b^n}{1 - b}$ (§. 11, 8), folglich ist unter dieser Voraussetzung

$$\frac{1}{1 - b} = 1 + b + b^2 + b^3 + \ldots$$

die Summe einer Reihe von unendlich vielen Gliedern.

Die Quotienten

$$\frac{x^{12}y^7 - x^7y^{12}}{x - y}, \quad \frac{c}{a - x}, \quad \frac{c}{a^2 - ax + x^2}, \quad \frac{1 + x}{1 + y}$$

lassen sich aus den gefundenen Quotienten ableiten, weil

$$\frac{x^{12}y^7 - x^7y^{12}}{x - y} = x^7y^7 \frac{x^5 - y^5}{x - y}$$

$$= x^7y^7(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$$

$$= x^{11}y^7 + x^{10}y^8 + x^9y^9 + x^8y^{10} + x^7y^{11}$$

$$\frac{c}{a - x} = \frac{c}{a} \frac{1}{1 - \frac{x}{a}}$$

$$\frac{c}{a^2 - ax + x^2} = \frac{c(a + x)}{a^3 + x^3} = \frac{c}{a^3}(a + x) \frac{1}{1 + \frac{x^3}{a^3}}$$

*) Im Altertum aus Eucl. Elem. 9, 35 bekannt.

$$\frac{1+x}{1+y} = 1 + \frac{x-y}{1+y} = 1 + x - y - (x-y)y + \ldots$$

6. Aus der Gleichung

$$\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} = a^n + a^{n-1}b + \ldots + ab^{n-1} + b^n$$

schließt man unter der Voraussetzung $a > b$ wie §. 11, 8, daß

I. $$(n+1)b^n < \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} < (n+1)a^n$$

Daher findet man, wenn ω ein echter Bruch ist,

$$m < \frac{(1+\omega)^m - 1}{\omega}, \qquad \frac{1-(1-\omega)^m}{\omega} < m$$

$$(1+\omega)^m > 1 + m\omega, \qquad 1 - m\omega < (1-\omega)^m$$

folglich ist

$(1+\omega)^m > c$, wenn $1 + m\omega > c$, d. h. $m > (c-1) : \omega$

$(1-\omega)^m > d$, wenn $1 - m\omega > d$, d. h. $m < (1-d) : \omega$

Ebenso findet man (I)

$(1+\omega)^{n+1} - 1 < (n+1)\omega\,(1+\omega)^n$ d. h. $(1+\omega)^n(1-n\omega) < 1$

II. $$1 + n\omega < (1+\omega)^n < \frac{1}{1-n\omega}$$

Ferner ist (I)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

III. $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

d. h. $(1\frac{1}{2})^2$, $(1\frac{1}{3})^3$, . . bilden eine steigende Reihe. Nun ist (II)

$$1 + \frac{1}{k} < \left(1+\frac{1}{kn}\right)^n < \frac{1}{1-\frac{1}{k}}$$

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < \left(1+\frac{1}{kn}\right)^{kn} < \left(\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right)^k$$

Also steigen die Glieder der Reihe nicht bis $4 (k = 2)$.

Indem man $a = b + 1$ setzt, findet man weiter (I)

$$(n+1) \cdot 1^n < 2^{n+1} - 1^{n+1}$$
$$(n+1) \cdot 2^n < 3^{n+1} - 2^{n+1}$$
$$(n+1) \cdot 3^n < 4^{n+1} - 3^{n+1}$$

u. s. w., folglich durch Addition

$$(n+1)(1^n + 2^n + \ldots + k^n) < (k+1)^{n+1} - 1$$

Ebenso erhält man auch

$$1^{n+1} - 0^{n+1} < (n+1) \cdot 1^n$$
$$2^{n+1} - 1^{n+1} < (n+1) \cdot 2^n$$
$$3^{n+1} - 2^{n+1} < (n+1) \cdot 3^n$$

u. s. w., folglich durch Addition

$$k^{n+1} < (n+1)(1^n + 2^n + \ldots + k^n)$$

Die gefundene Begrenzung

$$k^{n+1} < (n+1)(1^n + 2^n + \ldots + k^n) < (k+1)^{n+1} - 1$$

giebt zu erkennen, daß

$$(n+1)(1^n + 2^n + \ldots + k^n) - k^{n+1} < (k+1)^{n+1} - k^{n+1} - 1$$

und nach Division durch $(n+1)k^{n+1}$, daß

$$\frac{1^n + 2^n + \ldots + k^n}{k^{n+1}} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n+1}\left\{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{n+1} - 1 - \frac{1}{k^{n+1}}\right\}$$

Bei hinreichend großem k wird die rechte Seite beliebig klein. Also erreicht bei unendlichem k

$$\frac{1^n + 2^n + \ldots + k^n}{k^{n+1}} \text{ den Wert } \frac{1}{n+1}\text{*)}$$

§. 13. Teilbarkeit der Zahlen**).

(Beis §. 27 und 28.)

1. Wenn der Quotient der (ganzen) Zahlen a und m eine ganze Zahl ist, wenn also die Division von a durch m aufgeht, so sagt man, a ist teilbar durch m, m geht auf in a, a ist ein Dividuus (Multiplum, Vielfaches) von m, m ist ein Divisor (Teiler, Maß) von a. Alle Zahlen von der Form mx, welche die Formel mx umfaßt, wenn für die Unbestimmte (indeterminata) x beliebige ganze Zahlen gesetzt werden, sind durch m teilbar. Die durch 2 teilbaren Zahlen von der Form $2x$ heißen gerade (pares). Die durch 2 nicht teilbaren Zahlen $2x+1$ heißen ungerade (impares). Eucl. VII. def. 5 ff.

Wenn a durch m teilbar, und m durch p teilbar ist, so ist auch a durch p teilbar. Denn nach Voraussetzung ist $a = mx$, $m = py$, folglich $a = pxy$. Und wenn a durch m teilbar und z eine beliebige Zahl ist, so ist auch das Produkt az durch m teilbar.

---

*) Diesen Satz, dessen Anfänge bei Archimedes (Spiralen 10) zu finden sind, und dessen Aufstellung der erste Schritt zur Berechnung bestimmter Integrale war, haben die Mathematiker der ersten Hälfte des 17ten Jahrhunderts entwickelt. Fermat und Roberval Brief von 1636 Okt. 11 (Fermat opp. p. 140), Pascal oeuvres éd. Lahure II p. 482, Wallis Arithm. infin. 1656. Vgl. Stereom. §. 9.

**) In diesem der Arithmetik im engeren Sinne (Zahlenlehre) angehörigen Paragraphen wird unter Zahl eine ganze Zahl verstanden.

2. Wenn a und b durch m teilbar, x und y beliebige Zahlen sind, so ist $ax \pm by$ durch m teilbar (Eucl. V, 1). Denn nach der Voraussetzung ist $a = m\alpha$, $b = m\beta$, folglich $ax \pm by = m(\alpha x \pm \beta y)$.

Wenn von den Differenzen $a - b$ und $c - d$ jede durch m teilbar ist, so sind auch

$$a \pm c - (b \pm d), \quad ac - bd, \quad a^2 - b^2, \quad a^3 - b^3, \ldots$$

durch m teilbar. Denn

$$a \pm c - (b \pm d) = (a - b) \pm (c - d)$$
$$ac - bd = (a - b)c + b(c - d)$$
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2), \text{ u. s. f.}$$

3. Wenn die Zahl a durch die Zahl b dividiert den Rest c giebt, wenn wiederum b durch c dividiert den Rest d giebt, u. s. f., so bleibt endlich der Rest 0, weil die (ganzen) Zahlen $b, c, d, \ldots$ eine fallende Reihe bilden, und man hat die Kette von Gleichungen (§. 10, 3)

$$\begin{aligned} a &= pb + c \\ b &= qc + d \\ &\cdots\cdots \\ f &= tg + h \\ g &= uh \end{aligned}$$

Der letzte von Null verschiedene Rest h der gefundenen Reihe ist der *größte gemeinschaftliche Divisor* der Zahlen a und b. Denn h ist ein Divisor von g, also auch (2) von $tg + h$ d. i. f, also auch von jedem vorangehenden Rest, sowie endlich von b und a. Umgekehrt schließt man, daß ein Divisor von a und b auch ein Divisor von $c, d, \ldots, h$ ist, und daher nicht mehr als h sein kann.

Wenn zwei Zahlen einen gemeinschaftlichen Divisor über 1 nicht haben, so heißen sie *prim zu einander* (primi inter se, relative Primzahlen). Wenn h der größte gemeinschaftliche Divisor von a und b ist, so sind die Zahlen $a : h$ und $b : h$ prim zu einander. Insbesondere sind je zwei folgende natürliche Zahlen, a und $a + 1$, relative Primzahlen. Eucl. VII, 1.

Anmerkung. Wenn der Zähler und der Nenner eines Bruches nicht prim zu einander sind, so ist der Bruch *reducibel* und erhält seinen einfachsten Ausdruck, indem der Zähler und der Nenner durch ihren größten gemeinschaftlichen Divisor dividiert werden (§. 11, 2). Wenn der Zähler und der Nenner relative Primzahlen sind, so ist der Bruch *irreducibel*.

Um den größten gemeinschaftlichen Divisor mehrerer Zahlen $a, b, c, \ldots$ zu finden, berechnet man den größten gemeinschaftlichen Divisor h

von a und b, den größten gemeinschaftlichen Divisor h' von h und c, u. s. w. Jede Zahl, welche in a, b einzeln aufgeht, ist ein Divisor von h; jede Zahl, welche in a, b, c einzeln aufgeht, ist ein gemeinschaftlicher Divisor von h und c, also ein Divisor von h', u. s. w.

4. Wenn a und b prim zu einander sind, so geht jeder gemeinschaftliche Divisor von ak und b in k auf, und wenn zugleich ak durch b teilbar ist, so ist k durch b teilbar.

Beweis. Unter der Voraussetzung, daß a prim zu b ist, wird in der Kette von Gleichungen (3) der letzte Rest $h = 1$, folglich

$$\begin{aligned} ak &= pbk + ck \\ bk &= qck + dk \\ &\cdots\cdots \\ fk &= tgk + k \end{aligned}$$

Hieraus schließt man (2), daß ein gemeinschaftlicher Divisor von ak und b aufgeht in $ck, dk, \ldots, k$. Ebenso schließt man, wenn ak durch b teilbar ist, daß b aufgeht in $ck, dk, \ldots, k$.

5. Die gemeinschaftlichen Dividuen von a und b d. h. die Zahlen, welche sowohl durch a als auch durch b teilbar sind, sind von der Form $a\frac{b}{h}x$, wenn durch h der größte gemeinschaftliche Divisor von a und b bezeichnet wird. Ist nämlich $a = h\alpha$, $b = h\beta$, und ak durch b teilbar, so ist auch αk durch β teilbar; nun ist α prim zu β (3), folglich k durch β teilbar (4), d. h. $k = \beta x$, $ak = a\beta x$.

Die gemeinschaftlichen Dividuen von a, b, c sind von der Form $a\frac{b}{h}\frac{c}{h'}x$, wenn durch h' der größte gemeinschaftliche Divisor von $a\frac{b}{h}$ und c bezeichnet wird. U. s. w.

Der kleinste gemeinschaftliche Dividuus von a und b ist danach $a\frac{b}{h}$, der kleinste gemeinschaftliche Dividuus von a, b, c ist $a\frac{b}{h}\frac{c}{h'}$, u. s. w. Der kleinste gemeinschaftliche Dividuus der relativen Primzahlen a und b ist ab. Und wenn eine Zahl durch die relativen Primzahlen a und b teilbar ist, so ist sie durch das Produkt derselben teilbar. Eucl. VII. 36 ff.

6. Umgekehrt schließt man: Wenn a und k einzeln prim zu b sind, so ist auch das Produkt ak prim zu b. Denn ein gemeinschaftlicher Divisor von ak und b würde in k aufgehen (4), also wäre k nicht prim zu b, gegen die Voraussetzung. Eucl. VII, 26 ff.

Potenzen relativer Primzahlen sind relative Primzahlen. Wenn a prim zu b, so ist aa prim zu b, und a prim zu bb. Ebenso schließt man, daß a^2 prim zu b^2, b^3, u. s. w.

7. Eine Zahl, welche durch andere Zahlen außer 1 nicht teilbar ist, heißt eine Primzahl (numerus primus). Jede Zahl ist entweder eine Primzahl oder durch Primzahlen teilbar. Eucl. VII, 34.

Beweis. Wenn a keine Primzahl, sondern durch b teilbar ist, so ist b entweder eine Primzahl oder durch c teilbar, ferner c entweder eine Primzahl oder durch d teilbar, u. s. f. Die Zahlen b, c, d, . . bilden eine fallende Reihe, welche deshalb nur eine endliche Anzahl von Gliedern haben kann und mit einer Primzahl schließt, durch welche jede der vorangehenden Zahlen, also auch a teilbar ist (1).

Anmerkung. Es ist zweckmäßig, die Zahl 1 nicht zu den Primzahlen zu rechnen. Dann sind je zwei Primzahlen ohne Ausnahme prim zu einander. Die einzige gerade Primzahl ist 2. Wenn die Zahl a zwischen r^2 und $(r+1)^2$ liegt, und durch die Primzahlen, welche kleiner als r sind, nicht teilbar ist, so ist sie eine Primzahl. Gesetzt a wäre durch die Primzahl $r+s$ teilbar, so wäre $a = (r+s)x$ durch x teilbar. Nun ist

$$x = \frac{a}{r+s} < \frac{(r+1)^2}{r+s} < r+1$$

d. h. entweder eine Primzahl, die r nicht übersteigt, oder durch eine solche teilbar. Also wäre a durch eine Primzahl unter r teilbar, gegen die Voraussetzung; folglich kann a durch eine Primzahl über r nicht teilbar sein.

8. Die natürliche Zahlenreihe enthält unendlich viel Primzahlen. Eucl. IX, 20.

Beweis. Bedeutet p die höchste bekannte Primzahl, A das Produkt der bekannten Primzahlen 2, 3, 5, 7, . ., p, so ist $A+1$ entweder eine Primzahl über p oder durch eine Primzahl über p teilbar. Denn A ist durch jede der Primzahlen von 2 bis p teilbar; $A+1$ ist prim zu A (3), mithin durch keine der Primzahlen von 2 bis p teilbar. Wenn nun $A+1$ eine Primzahl nicht ist, so ist sie durch eine Primzahl teilbar, welche p übersteigt. Demnach ist keine gegebene Primzahl die letzte Primzahl in der Reihe der natürlichen Zahlen.

Anmerkung. Für die Aufeinanderfolge der Primzahlen ist ein allgemeines Gesetz nicht bekannt. Es giebt kein aus Potenzen einer Unbestimmten gebildetes Polynomium, das nur Primzahlen umfaßte. Z. B. die Formel $41 - x + x^2$ enthält für $x = 1$ bis 40 Primzahlen (Euler Hist. de l'Acad. de Berlin 1772 p. 36). Wenn aber $a + bx$

$+ cx^2$ für $x = m$ eine Primzahl p ergiebt, so hat für $x = m + py$ dieselbe Formel den Wert

$$a + b(m + py) + c(m + py)^2$$
$$= a + bm + cm^2 + bpy + 2cmpy + cp^2y^2$$
$$= p + (b + 2cm)py + cp^2y^2$$

der durch p teilbar, also keine Primzahl ist (Legendre Théorie des nombres Introd. 20).

9. Eine Zahl, welche durch andere Zahlen außer 1 teilbar ist, kann als Produkt von bestimmten Primzahlen (einfachen Faktoren) dargestellt werden und heißt zusammengesetzt aus diesen Primzahlen. Die allgemeine Formel einer aus den Primzahlen $a, b, c, \ldots$ zusammengesetzten Zahl ist $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$

Eine aus den Primzahlen $a, b, c, \ldots$ zusammengesetzte Zahl ist durch eine andere Primzahl p nicht teilbar, mithin aus andern Primzahlen nicht zusammensetzbar. Denn jede der Zahlen $a, b, c, \ldots$ ist prim zu p, folglich ist auch das Produkt $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ prim zu p (6).

10. Wenn die Zusammensetzung gegebener Zahlen aus Primzahlen bekannt ist, so läßt sich ohne weiteres erkennen, ob eine der Zahlen durch eine andere teilbar ist; welches ihr kleinster gemeinschaftlicher Dividuus ist; welches ihr größter gemeinschaftlicher Divisor ist; ob dieselben Potenzen sind.

Die Zahl N ist durch N_1 teilbar, wenn N_1 weder andere einfache Faktoren, noch einen derselben in größerer Anzahl hat als N. Wenn nämlich ab durch a_1b_1 teilbar ist, während a_1 in a aufgeht und b_1 prim zu a ist, so ist b durch b_1 teilbar. Denn es sei $a = a_1c$, also ist auch cb durch b_1 teilbar und b_1 prim zu c, folglich geht b_1 in b auf (4). Z. B. $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ ist durch $24 = 2^3 \cdot 3$ teilbar, nicht durch $48 = 2^4 \cdot 3$, nicht durch $63 = 3^2 \cdot 7$. Ein irreducibler Bruch kann nur dann in einen endlichen Decimalbruch verwandelt werden, wenn sein Nenner von der Form $2^\alpha \cdot 5^\beta$ ist.

Der kleinste gemeinschaftliche Dividuus von $N, N_1, N_2, \ldots$ wird gefunden, indem man jedem von den einfachen Faktoren dieser Zahlen unter den Exponenten, die er in $N, N_1, N_2, \ldots$ hat, den größten giebt und das Produkt dieser Potenzen bildet. Z. B. $3 \cdot 5 \cdot 7$, $2^3 \cdot 7$, $2 \cdot 3^2$, $2^3 \cdot 3$ haben den kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

Der größte gemeinschaftliche Divisor von $N, N_1, N_2, \ldots$ wird gefunden, indem man die einfachen Faktoren auswählt, welche $N, N_1, N_2, \ldots$ gemein haben, jedem derselben unter den Exponenten, die er in $N, N_1, N_2, \ldots$ hat, den kleinsten giebt und das Produkt dieser Potenzen

bildet. Z. B. $2^2 . 3^4 . 5$ und $2^5 . 3^3 . 7$ haben den größten gemeinschaftlichen Divisor $2^2 . 3^3$.

Wenn a, b, c Primzahlen bedeuten, und $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ die $m$te Potenz einer Zahl k ist, so sind α, β, γ durch m teilbar. Giebt es z. B. α_1 Faktoren a in der Zahl k, so enthält k deren $\alpha_1 m$, d. h. eine durch m teilbare Anzahl, u. s. f.

Wenn f, g, h relative Primzahlen bedeuten, und fgh eine $m$te Potenz ist, so sind f, g, h ebenfalls $m$te Potenzen. Denn ein einfacher Faktor kann in fgh nicht einen andern Exponenten haben, als in einer der Zahlen f, g, h, welche prim zu einander sind.

11. Wenn von einer Zahl ihre Zusammensetzung aus Primzahlen bekannt ist, so lassen sich ohne weiteres alle Divisoren der Zahl angeben. Bedeuten a, b, c, . . Primzahlen, so ist $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ durch alle Glieder des Produkts

$$(1 + a + a^2 + . . + a^\alpha)(1 + b + b^2 + . . + b^\beta)(1 + c + c^2 + . . + c^\gamma)$$

und nur durch solche teilbar. Denn die Glieder dieses Produkts sind in der Formel $a^r b^s c$ enthalten, wobei r, s, t der Reihe nach die Zahlen α, β, γ nicht übersteigen; also ist $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ durch $a^r b^s c^t$ teilbar (10).

Die Anzahl aller Divisoren der Zahl $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ ist

$$(1 + \alpha)(1 + \beta)(1 + \gamma)$$

weil das erste Polynomium $1 + \alpha$, das 2te $1 + \beta$, das 3te $1 + \gamma$ Glieder hat. Hierbei sind 1 und $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ (die Zahl selbst) als Divisoren der Zahl mitgezählt.

Die Summe aller Divisoren der Zahl ist das Produkt, durch dessen Entwicklung die Divisoren der Zahl gefunden werden, mithin (§. 11, 5).

$$\frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \quad \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \quad \frac{c^{\gamma+1} - 1}{c - 1}$$

Z. B. $360 = 2^3 . 3^2 . 5$ hat $4 . 3 . 2$ d. i. 24 Divisoren, nämlich

1, 2, 4, 8; 3, 6, 12, 24; 9, 18, 36, 72;

5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360

Die Summe derselben ist $15 . 13 . 6 = 1170$.

Anmerkung. Eine Zahl ist vollkommen (τελειός, perfectus) genannt worden, wenn sie der Summe ihrer Divisoren (die Zahl selbst ausgeschlossen) gleich ist. Die zur Zeit bekannten vollkommenen Zahlen sind in der Formel $(2^x - 1) . 2^{x-1}$ enthalten, unter der Bedingung, daß $2^x - 1$ eine Primzahl ist*). Z. B. $2^2 - 1 = 3$, $2^3 - 1 = 7$, $2^5 - 1 = 31$, $2^7 - 1 = 127$ sind Primzahlen, so daß

*) Eucl. VII, def. 22. IX, 36. Vergl. Klügel math. W. V p. 887. Terquem Nouv. Ann. III. Über die amicablen Zahlen findet man Näheres bei Klügel math. W. I p. 246, V p. 55.

$$3 \cdot 2 = 6 = 1 + 2 + 3$$
$$7 \cdot 4 = 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$
$$31 \cdot 16 = 496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$$

Wenn nämlich $2^x - 1$ eine Primzahl ist, so ist die Summe aller Divisoren von $(2^x - 1) \cdot 2^{x-1}$ mit Einschluß der Zahl selbst

$$(1 + 2^x - 1)(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{x-1})$$
$$= 2^x(2^x - 1) = 2(2^x - 1) \cdot 2^{x-1}$$

also nach Ausschluß der Zahl $(2^x - 1) \cdot 2^{x-1}$ gleich derselben Zahl.

Zwei Zahlen sind amicabel genannt worden, wenn jede der Summe der Divisoren der andern (die Zahl selbst ausgeschlossen) gleich ist z. B. 220 und 284.

12. Wenn $p, q, r, \ldots$ die Primzahlen bedeuten, durch welche das Produkt $ABC \ldots$ teilbar ist, wenn unter den Zahlen $A', B', C', \ldots$ durch $p, p^2, \ldots, q, q^2, \ldots, r, r^2, \ldots, \ldots$ mindestens ebensoviele teilbar sind, als unter den Zahlen $A, B, C, \ldots$, so ist das Produkt $A'B'C' \ldots$ durch das Produkt $ABC \ldots$ teilbar*).

Z. B. unter den Zahlen 3, 4, 5, 6, 9 sind 2 durch 2, 1 durch 2^2, 3 durch 3, 1 durch 3^2, 1 durch 5 teilbar.

Unter den Zahlen 12, 18, 45 sind 2 durch 2, 1 durch 2^2, 3 durch 3, 2 durch 3^2, und 1 durch 5 teilbar.

Da die letztern Anzahlen der Reihe nach nicht geringer sind, als die erstern, so ist $12 \cdot 18 \cdot 45$ durch $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 9$ teilbar.

Beweis. Unter den Zahlen $A, B, C, \ldots$ seien α durch p teilbare, β durch p^2 teilbare, γ durch p^3 teilbare u. s. f. Dann ist das Produkt $ABC \ldots$ zunächst durch p^α teilbar, der gefundene Quotient ist wiederum durch p^β teilbar, der neue Quotient durch p^γ, u. s. w. Das Produkt $ABC \ldots$ enthält also $\alpha + \beta + \gamma + \ldots$ Faktoren p. Von gleicher Bedeutung seien die Anzahlen $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$ für die Zahlen $A', B', C', \ldots$ Nun sind nach der Voraussetzung α', β', γ' der Reihe nach nicht geringer als $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, also ist $\alpha' + \beta' + \gamma' + \ldots$ nicht geringer als $\alpha + \beta + \gamma + \ldots$, d. h. $A'B'C' \ldots$ enthält nicht weniger Faktoren p als $ABC \ldots$ Aus denselben Gründen enthält $A'B'C' \ldots$ nicht weniger Faktoren $q, r, \ldots$ als $ABC \ldots$ Daher ist $A'B'C' \ldots$ durch $ABC \ldots$ teilbar (10).

13. Wenn eine beliebige Zahl der Reihe $1, 2, 3, \ldots, m$ durch k, und die ganze Zahl des Quotienten $m : k$ durch m' bezeichnet wird, so sind m' Zahlen der Reihe durch k teilbar, nämlich $k, 2k, \ldots, m'k$. Wenn ferner die ganze Zahl des Quotienten $m' : k$ durch m'' bezeichnet

*) Die in (12) und (13) enthaltenen Sätze sind von Gauß (Disq. arithm. 126. 127. 41).

wird, so sind m'' Zahlen der Reihe 1, 2, . ., m' durch k teilbar, mithin sind m'' Zahlen der gegebenen Reihe durch k^2 teilbar. U. s. w.

In der Reihe von ebensoviel folgenden Zahlen $a+1$, $a+2$, . ., $a+m$ giebt es mindestens m', höchstens $m'+1$ durch k teilbare Zahlen. Die kleinste durch k teilbare Zahl der Reihe, welche durch $a+c$ bezeichnet wird, kann $a+k$ nicht übersteigen. Also enthält die Reihe die durch k teilbaren Zahlen

$$a+c,\ a+c+k,\ \ldots,\ a+c+(m'-1)k$$

und außerdem $a+c+m'k$, wenn c klein genug ist.

Das Produkt $(a+1)(a+2)\ldots(a+m)$ ist durch das Produkt $1.2\ldots m$ teilbar. Wenn nämlich das zweite Produkt aus den Primzahlen $p, q, r, \ldots$ zusammengesetzt ist, so sind unter den Zahlen $a+1$, $a+2$, . ., $a+m$ mindestens ebensoviele durch $p, p^2, \ldots, q, q^2, \ldots, r, r^2, \ldots$ teilbar, als unter den Zahlen 1, 2, . ., m, folglich u. s. w. (12). Der Quotient des ersten Produkts durch das zweite ist eine figurierte Zahl (§. 28), mithin eine Summe von ganzen Zahlen, also auch aus diesem Grunde eine ganze Zahl.

Wenn $m=a+b+c+\ldots$, so ist $1.2.3\ldots m$ durch das Produkt

$$1.2\ldots a.1.2\ldots b.1.2\ldots c\ldots$$

teilbar, weil $1.2\ldots a$ durch $1.2\ldots a$, $(a+1)\ldots(a+b)$ durch $1.2\ldots b$, $(a+b+1)\ldots(a+b+c)$ durch $1.2\ldots c$, u. s. f. teilbar ist. Der Quotient ist durch m teilbar in dem Falle, daß m eine Primzahl ist. Der Quotient ist die Anzahl von Permutationen gewisser Elemente (§. 25, 4) und auch aus diesem Grunde eine ganze Zahl.

14. Wenn die Zahl m die Divisoren $a, b, c, \ldots$ hat, welche prim zu einander sind (jeder zu jedem der übrigen), so giebt es in der Reihe 1, 2, 3, . ., m

$$m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\ldots$$

Zahlen, die durch $a, b, c, \ldots$ nicht teilbar sind*).

Beweis. In der gegebenen Reihe giebt es $\frac{m}{a}$ Zahlen, welche durch a teilbar sind, nämlich $a, 2a, 3a, \ldots, \frac{m}{a}a$, folglich bleiben

$$m-\frac{m}{a}=m\left(1-\frac{1}{a}\right)$$

Zahlen übrig, welche durch a nicht teilbar sind.

---

*) Euler 1763 Nov. Comm. Petrop. 8 p. 74. Acta Petrop. 4, II p. 18. 8 p. 17. Vergl. Gauß Disq. arithm. 38. Dirichlet Zahlentheorie von Dedekind §. 11 ff.

Unter den durch a nicht teilbaren Zahlen der gegebenen Reihe hat man diejenigen noch auszuscheiden, welche durch b teilbar sind. Es giebt aber in der Reihe

$$b,\ 2b,\ 3b,\ \ldots,\ \frac{m}{b}b$$

ebensoviel durch a nicht teilbare Zahlen, als in der Reihe

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \frac{m}{b}$$

Denn b ist prim zu a, folglich kb durch a teilbar oder nicht teilbar, je nachdem k durch a teilbar ist oder nicht teilbar (4). Die letztere Reihe enthält nach dem obigen $\frac{m}{b}\left(1-\frac{1}{a}\right)$ Zahlen, welche durch a nicht teilbar sind. Nach Ausscheidung derselben bleiben von der gegebenen Reihe

$$m\left(1-\frac{1}{a}\right)-\frac{m}{b}\left(1-\frac{1}{a}\right)=m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)$$

Zahlen übrig, welche durch a, b nicht teilbar sind.

Unter den durch a, b nicht teilbaren Zahlen der gegebenen Reihe sind ferner auch noch diejenigen auszuscheiden, welche durch c teilbar sind, und deren es ebensoviel giebt, als es in der Reihe c, $2c$, $3c$, $\ldots$, $\frac{m}{c}c$ Zahlen giebt, die durch a, b nicht teilbar sind, nämlich $\frac{m}{c}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)$. Nach Weglassung derselben bleiben von der gegebenen Reihe

$$m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)-\frac{m}{c}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)=m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)$$

Zahlen übrig, die durch a, b, c nicht teilbar sind.

15. Wenn die sämtlichen Primzahlen, aus welchen die Zahl m zusammengesetzt ist, durch a, b, $\ldots$, h bezeichnet werden, so giebt es in der Reihe $1, 2, 3, \ldots, m$

$$m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{h}\right)$$

Zahlen, welche durch a, b, $\ldots$, h nicht teilbar (14), mithin prim zu m sind. Diese Anzahl wird nach Gauß (a. a. O.) in der Arithmetik durch $\varphi(m)$ bezeichnet.

Z. B. $60 = 2^2 . 3 . 5$. In der Reihe $1, 2, \ldots, 60$ giebt es also

$$\varphi(60) = 60 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = 16$$

Zahlen, welche prim zu 60 sind, nämlich

1	7	11	13	17	19	23	29
59	53	49	47	43	41	37	31

Wenn m und k relative Primzahlen sind, so sind auch m und $m - k$ relative Primzahlen.

Die Zahl 1 wird als prim zu sich selbst betrachtet, so daß $\varphi(1) = 1$. Eine Primzahl p ist prim zu allen niederen Zahlen, also $\varphi(p) = p - 1$. Wenn a, b, c Primzahlen bedeuten und $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma$ ist, so findet man

$$\varphi(m) = a^{\alpha-1} b^{\beta-1} c^{\gamma-1} (a - 1)(b - 1)(c - 1)$$

Wenn m durch μ ungerade Primzahlen teilbar ist, so ist $\varphi(m)$ durch 2^μ teilbar. Wenn m und n aus denselben Primzahlen zusammengesetzt sind, so kann das Verhältnis $\varphi(m) : \varphi(n)$ durch Potenzen derselben Primzahlen ausgedrückt werden, z. B. $\varphi(360) : \varphi(60) = 6$.

Wenn m und m' relative Primzahlen sind, so hat man

$$\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right) \ldots$$

$$\varphi(m') = m'\left(1 - \frac{1}{a'}\right)\left(1 - \frac{1}{b'}\right) \ldots$$

$$\varphi(mm') = mm'\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{a'}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{b'}\right) \ldots$$

folglich $\varphi(mm') = \varphi(m)\,\varphi(m')$, z. B.

$$\varphi(36) = \varphi(4)\,\varphi(9) = 2 \cdot 6 = 12$$

16. Wenn δ ein Divisor von m ist, so giebt es $\varphi\left(\frac{m}{\delta}\right)$ Zahlen der Reihe $1, 2, 3, \ldots, m$, für welche δ der größte Divisor ist, den sie mit m gemein haben. Denn unter den Zahlen von 1 bis m sind δ, $2\delta, \ldots, \frac{m}{\delta}\delta$ durch δ teilbar. Nun ist aber δ der größte gemeinschaftliche Divisor der Zahlen $k\delta$ und $\frac{m}{\delta}\delta$ nur dann, wenn k prim zu $\frac{m}{\delta}$ ist. Also giebt es in der gegebenen Reihe ebensoviel Zahlen, welche mit m den größten gemeinschaftlichen Divisor δ haben, als es Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, \frac{m}{\delta}$ giebt, welche prim zu $\frac{m}{\delta}$ sind, nämlich $\varphi\left(\frac{m}{\delta}\right)$ nach der angenommenen Bezeichnung (15).

Wenn alle Divisoren der Zahl m durch $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ bezeichnet werden, so ist*)

$$\varphi(\delta_1) + \varphi(\delta_2) + \varphi(\delta_3) + \ldots = m$$

Diese Eigenschaft wird erkannt, indem man die Zahlen $1, 2, \ldots, m$

*) Gauß Disq. arithm. 39. Vergl. Dirichlet a. a. O.

nach dem größten Divisor, welchen sie mit m gemein haben, gruppiert. In die Gruppe derjenigen Zahlen, welche mit m den größten gemeinschaftlichen Divisor δ_1 haben, gehören $\varphi\left(\frac{m}{\delta_1}\right)$ Zahlen; in die Gruppe derjenigen Zahlen, welche mit m den größten gemeinschaftlichen Divisor δ_2 haben, gehören $\varphi\left(\frac{m}{\delta_2}\right)$ Zahlen, u. s. w. Die Summe dieser Anzahlen $\varphi\left(\frac{m}{\delta_1}\right) + \varphi\left(\frac{m}{\delta_2}\right) + \ldots$ ist m, die Menge der verteilten Zahlen. Die Reihe $\frac{m}{\delta_1}, \frac{m}{\delta_2}, \ldots$ umfaßt aber alle Divisoren von m.

Diese Abzählung wird durch folgende Rechnung bestätigt. Es sei m aus den Primzahlen a, b, c zusammengesetzt und zwar $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma$. Ein Divisor δ dieser Zahl ist von der Form $a^\lambda b^\mu c^\nu$, wenn λ eine Zahl der Reihe $0, 1, 2, \ldots, \alpha$ bedeutet, μ eine Zahl der Reihe $0, 1, 2, \ldots, \beta$ und ν eine Zahl der Reihe $0, 1, 2, \ldots, \gamma$. Nun ist (15)

$$\varphi(\delta) = \varphi(a^\lambda)\,\varphi(b^\mu)\,\varphi(c^\nu)$$

Also stimmt die Summe aller Werte von $\varphi(\delta)$, welche zu den einzelnen Werten von λ, μ, ν gehören, mit dem Produkt der Reihen

$$\begin{aligned}
&\varphi(1) + \varphi(a) + \varphi(a^2) + \ldots + \varphi(a^\alpha)\\
&\varphi(1) + \varphi(b) + \varphi(b^2) + \ldots + \varphi(b^\beta)\\
&\varphi(1) + \varphi(c) + \varphi(c^2) + \ldots + \varphi(c^\gamma)
\end{aligned}$$

überein. Die erste Reihe hat den Wert

$$\begin{aligned}
&1 + (a-1) + a(a-1) + \ldots + a^{\alpha-1}(a-1)\\
&= 1 + (a-1)(1 + a + \ldots + a^{\alpha-1})\\
&= 1 + (a^\alpha - 1) = a^\alpha
\end{aligned}$$

Die zweite und dritte Reihe haben die Werte b^β und c^γ. Daher ist die Summe aller Werte von $\varphi(\delta)$ d. i. das Produkt der Reihen $= a^\alpha b^\beta c^\gamma = m$.

Beispiel. Die Zahl 60 hat die Divisoren 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

$\varphi(1)$	1	$\varphi(5)$	4	$\varphi(15)$	8
$\varphi(2)$	1	$\varphi(6)$	2	$\varphi(20)$	8
$\varphi(3)$	2	$\varphi(10)$	4	$\varphi(30)$	8
$\varphi(4)$	2	$\varphi(12)$	4	$\varphi(60)$	16

Die Summe dieser Anzahlen ist 60.

17. Jede Zahl a kann durch ein Vielfaches einer gegebenen positiven Zahl k und durch eine Zahl r der Reihe $0, 1, 2, \ldots, k-1$ ohne Ausnahme und auf eine Weise dargestellt werden, daß $a = sk + r$,

Wäre zugleich $a = s'k + r'$, so wäre $r - r' = (s' - s)k$ durch k teilbar, gegen die über r und r' gemachte Voraussetzung.

Zufolge dieser Darstellung der Zahl a heißt r **der Rest von a nach dem Modulus k**. Wenn zwei Zahlen a und b nach dem Modul k denselben Rest haben oder nicht, so werden sie **kongruent** oder **inkongruent** nach dem Modul k genannt. Um die Kongruenz der Zahlen a und b nach dem Modul k auszudrücken, schreibt man*)

$$a \equiv b, \text{ mod } k$$

Z. B. $32 \equiv 17$, mod 5, weil 32 und 17 nach dem Modul 5 denselben Rest 2 haben; $23 \equiv -17$, mod 8, weil 23 und -17 nach dem Modul 8 denselben Rest 7 haben. Die nach dem Modul k mit b kongruenten Zahlen sind von der Form $b + tk$.

Die Differenz der nach dem Modul k kongruenten Zahlen a und b ist von der Form tk d. h. durch den Modul der Kongruenz teilbar. Ein gemeinschaftlicher Divisor von a und k geht auch in b auf; der größte gemeinschaftliche Divisor von a und k ist zugleich der größte gemeinschaftliche Divisor von b und k.

Umgekehrt schließt man, daß die Zahlen a und b nach dem Modul k kongruent oder inkongruent sind, je nachdem ihre Differenz durch k teilbar oder nicht teilbar ist.

18. I. Wenn zwei Zahlen nach dem Modul k kongruent sind, so sind sie auch nach jedem Divisor von k kongruent. Wenn zwei Zahlen nach den Moduln $k, l, m, \ldots$ kongruent sind, so sind sie auch nach dem kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus der Moduln kongruent (5). Denn nach der Voraussetzung geht k in der Differenz der beiden Zahlen auf, folglich u. s. w.

II. Wenn nach einem Modul die Zahlen a und b, m und n kongruent sind, so sind auch die Summen oder Differenzen $a \pm m$ und $b \pm n$, die Produkte am und bn, die Potenzen a^c und b^c nach demselben Modul kongruent. Denn nach der Voraussetzung geht der Modul sowohl in $a - b$, als auch in $m - n$ auf, folglich u. s. w. (2).

Wenn überhaupt nach einem Modul die Zahlen x und y, a_0 und b_0, a_1 und b_1, a_2 und b_2, . . kongruent sind, so sind auch die Polynomien $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ und $b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \ldots$ nach demselben Modul kongruent.

III. Aus der Kongruenz der Vielfachen am und bm nach dem Modul k folgt die Kongruenz der Zahlen a und b (nicht nach dem Modul k, sondern nur) nach dem Modul $\frac{k}{\delta}$, wenn durch δ der größte

*) Gauß Disq. arithm. 1 ff. Vergl. Dirichlet Zahlentheorie §. 17.

gemeinschaftliche Divisor von m und k bezeichnet wird. Denn nach der Voraussetzung ist $m(a-b)$ durch k teilbar, also auch $\frac{m}{\delta}(a-b)$ durch $\frac{k}{\delta}$ teilbar; nun ist $\frac{m}{\delta}$ prim zu $\frac{k}{\delta}$, folglich $a-b$ durch $\frac{k}{\delta}$ teilbar (4).

Aus $27 \equiv 12$, mod 5 schließt man $9 \equiv 4$, mod 5
Aus $120 \equiv 84$, mod 18 schließt man $10 \equiv 7$, mod 3

19. Alle Zahlen werden nach dem Modul k in k Klassen so geteilt, daß die Zahlen einer Klasse mit 0, die Zahlen einer andern Klasse mit 1, u. s. w., die Zahlen der letzten Klasse mit $k-1$ nach dem Modul k kongruieren. Zahlen einer Klasse sind kongruent, Zahlen verschiedener Klassen sind inkongruent nach dem angenommenen Modul (17). Wählt man aus jeder Klasse eine Zahl nach Belieben aus, so hat man ein vollständiges System nach dem Modul k inkongruenter Zahlen, wie es z. B. je k folgende Zahlen c, $c+1$, $c+2$, . ., $c+k-1$ bilden.

Wenn die Zahlen x_1, x_2, . ., x_k nach dem Modul k inkongruent sind und b prim zu k, so bilden die Zahlen $a+bx_1$, $a+bx_2$, . ., $a+bx_k$ wiederum ein vollständiges System inkongruenter Zahlen. Wären $a+bx_1$ und $a+bx_2$ kongruent nach dem Modul k, so wäre ihre Differenz $b(x_1-x_2)$ durch k teilbar; nun ist b prim zu k, also wäre x_1-x_2 durch k teilbar (4), mithin $x_1 \equiv x_2$, mod k, gegen die Voraussetzung.

Wenn δ ein Divisor von k ist, so giebt es $\varphi\left(\frac{k}{\delta}\right)$ Zahlen der Reihe 1, 2, . ., k, für welche δ der größte Divisor ist, den sie mit k gemein haben (16). Also giebt es $\varphi\left(\frac{k}{\delta}\right)$ Klassen, die solche Zahlen enthalten, daß δ der größte Divisor ist, welchen sie mit k gemein haben. Insbesondere giebt es $\varphi(k)$ Klassen, deren Zahlen prim zu k sind.

20. Die Reste von Produkten oder Potenzen werden am einfachsten aus den Resten ihrer Faktoren berechnet. Wenn a und a' nach dem Modul k die Reste r und r' haben, so hat aa' nach dem Modul k denselben Rest als rr' d. h. $aa' \equiv rr'$, mod k (18). Und wenn a^α den Rest s hat, so hat $a^{\alpha+1}$ denselben Rest als rs. Z. B. Nach dem Modul 13 haben 217 und 57 die Reste 9 und 5, folglich $217 \cdot 57 \equiv 9 \cdot 5 \equiv 6$, und $57^2 \equiv 25 \equiv -1$.

Nach dem Modul 2 ist $a^\alpha \equiv a$, weil beide den Rest 0 oder 1 haben, je nachdem a gerade oder ungerade ist.

Nach dem Modul 5 sind alle Zahlen kongruent mit einer der Zahlen 0, 1, −1, 2, −2. Nach demselben Modul sind also alle Quadrate kongruent mit einer der Zahlen 0, 1, −1. Daher ist entweder a oder $a^2 - 1$ oder $a^2 + 1$ durch 5 teilbar, mithin ist $a(a^2 - 1)(a^2 + 1) = a^5 - a$ durch 5 teilbar, d. h. $a^5 \equiv a$, mod 5 und mod 2, folglich auch mod 10. Die 5ten Potenzen haben dieselben Einer als die Zahlen.

Nach dem Modul 13 sind die Potenzen 57, 57^2, 57^3, .. der Reihe nach kongruent mit 5, −1, −5, 1 in periodischer Wiederkehr. Nach dem Modul 11 sind 9, 9^2, 9^3, .. der Reihe nach kongruent mit −2, 4, 3, 5, 1; nach dem Modul 5 sind dieselben Potenzen der Reihe nach kongruent mit −1, 1. Nach dem Modul 15 sind 12, 12^2, 12^3, .. der Reihe nach kongruent mit −3, −6, 3, 6.

21. Wenn der Modul eine Primzahl p und der Dignand a durch p nicht teilbar ist, so bilden die Reste der Potenzen a, a^2, a^3, .. Perioden von höchstens $p - 1$ Gliedern, indem $a^{p-1} \equiv 1$, $a^p \equiv a$, .., mod p*). Wenn der Modul eine zusammengesetzte Zahl k und a prim zu k ist, so bilden die Reste von a, a^2, a^3, .. Perioden von höchstens $\varphi(k)$ d. i. soviel Gliedern, als Zahlen der Reihe 1, 2, .., k prim zu k sind, indem $a^{\varphi(k)} \equiv 1$, mod k.

Nach dem Modul 5 hat 3^4 den Rest 1, nach dem Modul 37 hat 5^{36} den Rest 1. Nach dem Modul 7 hat nicht nur 2^6, sondern auch schon 2^3 den Rest 1; nach dem Modul 13 hat 5^{12}, aber auch schon 5^4 den Rest 1. Weil $\varphi(15) = 8$, so ist $2^8 \equiv 1$, mod 15; es hat aber auch schon 2^4 nach dem Modul 15 den Rest 1.

Beweis. Wenn a, $2a$, $3a$, .. nach dem Modul p die Reste r_1, r_2, r_3, .. haben, so sind die Produkte $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1)a^{p-1}$ und $r_1 r_2 r_3 \ldots r_{p-1}$ kongruent (18). Weil a prim zu p, so sind die Reste r_1, r_2, .. von 0 verschieden und inkongruent (19), mithin Zahlen der Reihe 1, 2, .., $p - 1$, so daß ihr Produkt den Wert $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1)$ hat. Dieser Wert ist prim zu p, folglich (18, III) $a^{p-1} \equiv 1$, mod p. Die Kongruenz $a^p \equiv a$, mod p findet auch dann noch statt, wenn a durch p teilbar ist.

Wenn der Modul die zusammengesetzte Zahl k ist, und die Zahlen der Reihe 1, 2, .., k, welche prim zu k sind und deren es $\varphi(k)$ giebt, durch k_1, k_2, k_3, .. bezeichnet werden, wenn ferner die Zahlen ak_1, ak_2, ak_3,

*) Fermats Lehrsatz (1640). Die Ausdehnung dieses Satzes auf zusammengesetzte Moduln hat Euler gefunden Nov. Comm. Petrop. 8 p. 74. Vergl. Gauß Disq. arithm. 50. Der obige einfache Beweis ist von Dirichlet gegeben worden Crelle J. 3 p. 390 und Zahlentheorie §. 19.

. . nach dem Modul k die Reste r_1, r_2, r_3, . . haben, so ergiebt sich wiederum durch Multiplikation

$$a^{\varphi(k)} k_1 k_2 k_3 \ldots \equiv r_1 r_2 r_3 \ldots, \text{ mod } k$$

Nach der Voraussetzung sind a und k relative Primzahlen, k_1, k_2, k_3, . . inkongruente Zahlen, also sind auch r_1, r_2, r_3, . . inkongruent, von 0 verschieden und prim zu k, mithin Zahlen der Reihe k_1, k_2, k_3, . ., so daß $r_1 r_2 r_3 \ldots \equiv k_1 k_2 k_3 \ldots$, u. s. w.

22. Alle durch k nicht teilbaren Quadrate sind nach dem Modul k mit gewissen Zahlen der Reihe 1, 2, . ., $k - 1$ kongruent, mit den übrigen nicht. Die erstern Zahlen (und die mit ihnen kongruenten Zahlen) heißen die quadratischen Reste von k, die übrigen heißen die quadratischen Nicht-Reste von k*).

Weil $(k \pm x)^2 - x^2$ durch k teilbar ist, so ist

$$(k \pm x)^2 \equiv x^2, \text{ mod } k$$

und man braucht, um die Reste aller Quadrate nach dem Modul k d. h. alle quadratischen Reste von k zu finden, nur die Reste der Quadrate von 1, 2, . ., $\frac{1}{2}(k-1)$ oder $\frac{1}{2}k$, je nachdem k ungerade oder gerade, aufzusuchen. Der Charakter einer Zahl wird dadurch bestimmt, daß man entscheidet, ob sie zu den (quadratischen) Resten oder zu den Nichtresten von k gehört.

Da $(a+1)^2 = a^2 + (2a+1)$ ist, so kann man die Quadrate von 1, 2, 3, . . durch Addition der ungeraden Zahlen bilden, $2^2 = 1^2 + 3$, $3^2 = 2^2 + 5$, u. s. w., und die folgenden Reste aus dem jedesmal vorhergehenden Rest, indem man zu ihm eine ungerade Zahl addiert ableiten. Z. B. nach dem Modul 13 sind 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2 der Reihe nach kongruent mit 1, $1+3$, $4+5$, $9+7 \equiv 3$, $3+9$, $12+11 \equiv 10$; alle Quadrate, in denen 13 nicht aufgeht, kongruieren nach dem Modul 13 mit einer der Zahlen 1, 3, 4, 9, 10, 12, welche die (quadratischen) Reste von 13 heißen, während 2, 5, 6, 7, 8, 11 die Nichtreste von 13 sind.

14 hat die Reste	$\overset{3}{1}$	$\overset{5}{4}$	$\overset{7}{9}$	$\overset{9}{2}$	$\overset{11}{11}$	$\overset{13}{8}$	7		
Nichtreste	3	5	6	10	12	13			
15 hat die Reste	$\overset{3}{1}$	$\overset{5}{4}$	$\overset{7}{9}$	$\overset{9}{1}$	$\overset{11}{10}$	$\overset{13}{6}$	4		
Nichtreste	2	3	5	7	8	11	12	13	14
17 hat die Reste	$\overset{3}{1}$	$\overset{5}{4}$	$\overset{7}{9}$	16	$\overset{11}{8}$	$\overset{13}{2}$	$\overset{15}{15}$	13	
Nichtreste	3	5	6	7	10	11	12	14	

*) Diese für die Arithmetik wichtige Unterscheidung ist von Euler (Opusc. anal. I p. 263) gemacht worden. Vergl. Gauß Disq. arithm. 94 ff. Dirichlet Zahlentheorie §. 32 ff.

Wenn p eine ungerade Primzahl ist, und wenn a und b Zahlen der Reihe 1, 2, . ., $\frac{1}{2}(p-1)$ bedeuten, so sind a^2 und b^2 nach dem Modul p inkongruent; wäre $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ durch p teilbar, so müßte, weil $a - b$ prim zu p ist, $a + b$ durch p teilbar sein, gegen die über a und b gemachte Voraussetzung. Daher giebt es nicht weniger als $\frac{1}{2}(p-1)$ quadratische Reste von p.

23. Wenn p eine Primzahl und a durch p nicht teilbar ist, so können die Zahlen 1, 2, . ., $p-1$ so gepaart werden, daß die aus den einzelnen Paaren gebildeten Produkte nach dem Modul p mit a kongruieren. Wenn insbesondere a ein quadratischer Rest von p ist, so giebt es in der Reihe 1, 2, . ., $p-1$ zwei zu p sich ergänzende Zahlen, welche mit sich selbst Paare von der angegebenen Art bilden*).

Beispiel. Die quadratischen Reste von 7 sind 1, 2, 4; daher gehört 12 zu den Nichtresten, 9 zu den Resten. Aus den Zahlen 1 bis 6 lassen sich 3 Paare bilden, so daß die aus den Paaren gebildeten Produkte nach dem Modul 7 mit 12 kongruieren, und 4 Paare, so daß die Produkte mit 9 kongruieren. In der That sind nach dem Modul 7

$$1 \cdot 5 \equiv 2 \cdot 6 \equiv 3 \cdot 4 \equiv 12$$

$$1 \cdot 2 \equiv 3 \cdot 3 \equiv 4 \cdot 4 \equiv 5 \cdot 6 \equiv 9$$

Beweis. Wenn m eine der Zahlen 1, 2, . ., $p-1$ bedeutet, also prim zu p ist, so haben die Zahlen $m, 2m, \ldots, (p-1)m$ nach dem Modul p verschiedene Reste aus der Reihe 1, 2, . ., $p-1$ (19). Einer dieser Reste ist aber auch der Rest von a nach dem Modul p, weil a durch p nicht teilbar ist. Also giebt es unter den Produkten $m, 2m, \ldots, (p-1)m$ eines und nicht mehr als eines, das mit a nach dem Modul p kongruiert.

Wenn a ein quadratischer Rest von p ist, so giebt es eine und nicht mehr als eine Zahl k der Reihe 1, 2, . ., $\frac{1}{2}(p-1)$, welche mit sich selbst ein Paar bildet von der Art, daß $k^2 \equiv a$, mod p (22). Zugleich ist dann auch $(k-p)^2 \equiv a$, mod p.

24. Wenn p eine Primzahl und a durch p nicht teilbar ist, so ist

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1) \equiv \varepsilon a^{\frac{1}{2}(p-1)}$$

wo ε den Wert 1 oder -1 hat, je nachdem a von p ein quadratischer Nichtrest oder ein Rest ist.

Beweis. Wenn a ein Nichtrest von p ist, so lassen sich die Zahlen $m, m_1, m_2, \ldots$ der Reihe 1, 2, . ., $p-1$ mit andern Zahlen $n, n_1, n_2, \ldots$ derselben Reihe dergestalt paaren, daß (23)

$$mn \equiv m_1 n_1 \equiv m_2 n_2 \equiv \ldots \equiv a, \text{ mod } p$$

*) Diesen Satz und die Beweise der folgenden Sätze verdankt man Dirichlet Crelle J. 3. p. 390.

Aus diesen $\frac{1}{2}(p-1)$ Kongruenzen schließt man (18, II)

$$mm_1m_2 \ldots nn_1n_2 \ldots \equiv a^{\frac{1}{2}(p-1)}, \mod p$$

Nun ist $mm_1m_2 \ldots nn_1n_2 \ldots = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1)$, u. s. w.

Wenn a ein Rest von p ist, so lassen sich Zahlen $m, m_1, m_2, \ldots$ der Reihe $1, 2, \ldots, p-1$ nach Ausschluß von zwei bestimmten Zahlen k und $p-k$ mit andern Zahlen $n, n_1, n_2, \ldots$ derselben Reihe dergestalt paaren, daß $mn \equiv m_1n_1 \equiv m_2n_2 \equiv \ldots \equiv a$, mod p. Aus diesen $\frac{1}{2}(p-3)$ Kongruenzen folgt

$$mm_1m_2 \ldots nn_1n_2 \ldots = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1)}{k(p-k)} \equiv a^{\frac{1}{2}(p-3)}, \mod p$$

Nun ist $k(p-k) \equiv -k^2 \equiv -a$, mod p, folglich durch Multiplikation

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1) \equiv -a^{\frac{1}{2}(p-1)}, \mod p$$

25. Wenn p eine Primzahl ist, so ist*)

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1) \equiv -1, \mod p$$

Denn 1 gehört zu den quadratischen Resten von p, und $1^{\frac{1}{2}(p-1)} = 1$, folglich u. s. w. (24). Umgekehrt schließt man, daß p eine Primzahl ist, wenn p in $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1) + 1$ aufgeht; wäre p durch eine kleinere Zahl q teilbar, so ginge q in $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1)$ auf, also nicht in $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1) + 1$.

Wenn p eine Primzahl und a durch p nicht teilbar, so ist $a^{\frac{1}{2}(p-1)}$ kongruent entweder mit 1 oder mit -1, je nachdem a von p ein quadratischer Rest oder ein Nichtrest ist**). Nach dem eben bewiesenen Satze ist $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1) \equiv -1$, folglich u. s. w. (24).

Weil p entweder in $a^{\frac{1}{2}(p-1)} - 1$ oder in $a^{\frac{1}{2}(p-1)} + 1$ aufgeht, so geht es immer in dem Produkt dieser Formeln d. i. $a^{p-1} - 1$, auf, wie der Fermatsche Satz (21) aussagt.

§. 14. Quadrat einer Decimalzahl.

1. Das Quadrat eines Polynomium besteht aus dem Quadrat des ersten Gliedes, dem doppelten Produkt des ersten Gliedes mit dem zweiten nebst dem Quadrat des zweiten Gliedes, dem doppelten Produkt der ersten 2 Glieder mit dem dritten nebst dem Quadrat des dritten Gliedes, dem doppelten Produkt der ersten 3 Glieder mit dem vierten nebst dem Quadrat des vierten Gliedes, u. s. f.

*) Wilsons Satz (1770). Vergl. Gauß Disq. arithm. 76. Cauchy Résumés analyt. 1833 p. 36.

**) Eulers Satz (Opusc. anal. I p. 263). Über die Teilbarkeit von $10^p - 1$ und $10^p + 1$ durch die Primzahl $2p + 1$ vergl. Euler Hist. de l'Acad. de Berlin 1772 p. 35.

Beweis. Nach §. 9, 5 ist

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\\ (a+b+c)^2 &= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2\\ (a+b+c+d)^2 &= (a+b+c)^2 + 2(a+b+c)d + d^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2\\ &\quad + 2(a+b)c + c^2\\ &\quad + 2(a+b+c)d + d^2, \text{ u. s. f.}\end{aligned}$$

2. Eine Decimalzahl d. i. ein Polynomium bestehend aus Einern, Zehnern, Hunderten u. s. w., und aus Zehnteln, Hunderteln u. s. w. wird nach obiger Regel quadriert, indem man das Quadrat der höchsten Stelle in die erste Zeile setzt, dann der Verdoppelung der höchsten Stelle die nächste Stelle anhängt, die so entstandene Zahl mit der 2ten Stelle multipliciert und das Produkt in die zweite Zeile 2 Stellen weiter rechts setzt; dann der Verdoppelung der zwei höchsten Stellen die nächste Stelle anhängt, die so entstandene Zahl mit der 3ten Stelle multipliciert und das Produkt in die dritte Zeile 2 Stellen weiter rechts setzt, u. s. w., endlich die Zeilen kolonnenweise addiert, z. B.

$7486^2 =$	49..
14	576..
148	11904..
1496	89796
	56040196

Die einzelnen Zeilen sind entstanden aus 7 . 7, 144 . 4, 1488 . 8, 14966 . 6. In dem ersten Produkt bedeutet jeder Faktor Tausende, im zweiten Produkt Hunderte, im dritten Produkt Zehner, u. s. f. Daher die obige Regel für die Unterordnung der einzelnen Zeilen. Das Komma wird hinter das Quadrat der Einer gesetzt. Z. B.

$30{,}018^2 =$	900,00..	$0{,}0209^2 =$	0,000400..
60 0	6001..	40	3681
60 02	480224		0,00043681
	901,080324		

Das abgekürzte Verfahren, welches man beim Quadrieren ungenauer Decimalzahlen anzuwenden hat, erhellt aus folgenden Beispielen:

$28{,}357^2 =$	4..	$3{,}15806^2 =$	9,..
4	384,..	6 2	61..
56	16 89	6 30	3125.
56 6	2 83	6 316	5046
	39		38
	804,11		9,97334

3. Beginnt die Zahl mit der $m$ten Stelle vor dem Komma, so beginnt das Quadrat mit der $(2m - 1)$ten oder $2m$ten Stelle vor dem Komma.

Beginnt die Zahl mit der $m$ten Stelle nach dem Komma, so beginnt das Quadrat mit der $2m$ten oder $(2m - 1)$ten Stelle nach dem Komma.

Z. B. Das Quadrat von 3 Tausenden hat 9 Millionen
" " " 4 " " 16 "
" " " 3 Tausendteln " 9 Milliontel
" " " 4 " " 16 "

§. 15. Quadratwurzel einer Decimalzahl.

1. Quadratwurzel einer Zahl ist die Zahl, deren Quadrat der gegebenen Zahl (Radikandus) gleich ist. Die Quadratwurzel von a wird bezeichnet $\sqrt{a}$. Das Zeichen $\sqrt{}$ wurde aus dem Anfangsbuchstaben von radix im 16ten Jahrh. gebildet. Ein Strich, der die Fortsetzung des Wurzelzeichens bildet, ersetzt die Klammern, in welche man den Radikandus einzuschließen hat, wenn er ein Produkt oder ein Polynomium ist.

$$\sqrt{a^2} = a, \quad \sqrt{a^2} = a$$
$$\sqrt{49} = 7 \text{ weil } 7^2 = 49$$
$$\sqrt{0{,}09} = 0{,}3 \text{ weil } 0{,}3^2 = 0{,}09$$
$$\sqrt{a + b} = \sqrt{(a + b)}$$

2. Ist der Radikandus eine Decimalzahl und beginnt er mit der $(2m - 1)$ten oder $2m$ten Stelle vor dem Komma, so beginnt die Quadratwurzel mit der $m$ten Stelle vor dem Komma (§. 14, 3).

Beginnt der Radikandus mit der $(2m - 1)$ten oder $2m$ten Stelle nach dem Komma, so beginnt die Quadratwurzel mit der $m$ten Stelle nach dem Komma.

$\sqrt{38475}$ erhebt sich bis in die Hunderte
$\sqrt{0{,}007}$ " " " " " Hundertel

3. Um die Quadratwurzel einer Decimalzahl zu berechnen, z. B. 28573,84521, teilt man dieselbe vom Komma auf- und abwärts in Abteilungen von je zwei Stellen:

$$2\,|\,85\,|\,73{,}84\,|\,52\,|\,1$$

und erkennt (2), daß die Wurzel sich in die Hunderte erhebt, also etwa a Hunderte, b Zehner, c Einer, d Zehntel, . . enthält. Die einzelnen Stellen dieser unbestimmten Decimalzahl sind der Reihe nach so zu

bestimmen, daß die Stücke des Quadrats derselben (§. 14, 2) von dem Radikandus subtrahiert kleinste positive Reste übrig lassen.

Zuerst darf a^2 die erste Abteilung 2 nicht übersteigen, damit das Quadrat der Wurzel vom Radikandus subtrahiert werden kann. Daher $a = 1$. Man subtrahiert a^2, fügt dem Rest 1 die nächste Abteilung 85 hinzu und bildet die Verdoppelung 2 der ersten Wurzelstelle.

Ferner muß $2b$ weniger als 18 betragen. Daher $b = 18 : 2$, wovon nicht mehr als 6 brauchbar ist, weil schon $27 \cdot 7$ mehr als 185 beträgt. Man subtrahiert $26 \cdot 6$ von 185, fügt dem Rest 29 die nächste Abteilung 73 hinzu und bildet die Verdoppelung 32 der 2 ersten Wurzelstellen.

Ferner muß $32c$ weniger als 297 betragen. Daher $c = 297 : 32$, wovon 9 zu nehmen. Man subtrahiert $329 \cdot 9$ von 2973, fügt dem Rest 12 die nächste Abteilung 84 hinzu und bildet die Verdoppelung 338 der 3 ersten Wurzelstellen.

Ferner muß $338d$ weniger als 128 betragen. Daher $d = 128 : 338$, wovon 0 zu nehmen. Man braucht $3380 \cdot 0$ von 1284 nicht erst zu subtrahieren, fügt aber dem Rest 1284 die nächste Abteilung 52 hinzu und bildet die Verdoppelung 3380 der 4 ersten Wurzelstellen, u. s. f. nach folgendem Schema:

$\sqrt{2\|85\|73,84\|52\|1}$	$=$	169,037..
1		2
1 85		32
1 56		338
29 73		3380
29 61		33806
12 8452		
10 1409		
2 7043 10		
2 3664 69		
3378 41..		

Beim Abbruch der Rechnung wird die letzte Stelle der Wurzel um 1 erhöht, wenn dabei ein absolut kleinerer Rest bleibt. Im vorstehenden Beispiel hat die letzte Stelle besser 8 als 7 Einheiten.

Wenn der Radikandus ein echter Decimalbruch ist, so hat die Quadratwurzel 0 Einer, die Zehntel der Wurzel sind die Wurzel der Hundertel des Radikandus; wenn deren auch 0 sind, so sind die Hundertel der Wurzel die Wurzel von den Zehntausendteln des Radikandus, u. s. f.

$$\sqrt{0{,}1} = \sqrt{0{,}10} = 0{,}316..$$

9	62
100	
61	
3900	
3756	
144	

$$\sqrt{0{,}00003} = 0{,}00547..$$

25	108
500	
416	
8400	
7609	
791 ..	

4. Nachdem man m Stellen der Wurzel (abgesehen von vorausgehenden Nullen) berechnet hat, findet man $m - 1$ bis m folgende Stellen der Wurzel einfacher, indem man den Rest durch die doppelte bekannte Wurzel abgekürzt dividiert. Z. B.

$$\sqrt{30} = 5{,}4772_3$$

25	10
500	10 8
416	10 94
8400	
7609	
791	
766	
25	
22	
3	

Für 7910 : 1094 nimmt man 791 : $109{,}_4$ und berechnet diesen Quotienten so genau als möglich nach den Regeln der abgekürzten Division.

Ist a der Radikandus, b der berechnete Teil von $\sqrt{a}$ und r der Rest, mithin $b^2 + r = a$, und setzt man $b + \frac{r}{2b}$ für die gesuchte Quadratwurzel, so ist der begangene Fehler

$$b + \frac{r}{2b} - \sqrt{a} = \frac{(b + r : 2b)^2 - a}{b + r : 2b + \sqrt{a}} = \frac{r^2}{2b(2b^2 + r + 2b\sqrt{a})}$$

$$= \frac{r^2}{2b(b + \sqrt{a})^2} < \left(\frac{r}{2b}\right)^2 : 2b$$

In dem obigen Beispiele ist $\frac{r}{2b}$ nahe $= 0{,}007$, $2b$ nahe $= 10$, mithin der Fehler $< 0{,}000\,005$.

§. 16. Lehrsätze von den Quadratwurzeln.

(bis §§. 50. 51. 42. 43. 49. 55.)

1. Die Quadratwurzel einer ganzen Zahl ist entweder ganz oder irrational*) d. h. durch Brüche nicht genau angebbar, aber begrenzbar mit beliebig kleinem Fehler.

Beweis. Wäre $\sqrt{a} = \frac{r}{s}$, ein irreducibler Bruch (§. 13, 3), so wäre $\left(\frac{r}{s}\right)^2 = \frac{r^2}{s^2}$ (§. 11, 5) $= a$ (§. 15, 1). Nun ist $\frac{r^2}{s^2}$ irreducibel (§. 13, 6), mithin a keine ganze Zahl gegen die Voraussetzung. Also kann $\sqrt{a}$ durch einen Bruch nicht genau angegeben werden. Aber zu jeder willkürlich gewählten ganzen Zahl s läßt sich eine bestimmte ganze Zahl r ermitteln, so daß

$$\frac{r}{s} < \sqrt{a} < \frac{r+1}{s}$$

Denn as^2 liegt, wenn a kein Quadrat (einer ganzen Zahl) ist, zwischen zwei bestimmten Gliedern r^2 und $(r+1)^2$ der steigenden Reihe 1^2, 2^2, 3^2,... Dadurch findet man für $\sqrt{a}$ den Näherungswert $\frac{r}{s}$ mit einem Fehler, der geringer ist als $\frac{1}{s}$, beliebig klein.

Die durch Brüche genau angebbaren Zahlen heißen rational (ῥητός). Die Quadratwurzel einer ganzen Zahl kann ein periodischer Decimalbruch nicht sein, weil dessen Wert rational ist.

2. Irrationale Zahlen a, a', welche bei beliebig kleiner Zahl α beide zwischen den rationalen A und $A + \alpha$ liegen, sind von einander nicht verschieden. Denn

$$a' - a < A + \alpha - a < A + \alpha - A = \alpha$$

also $a' - a < \alpha$. Wäre die Differenz $a' - a$ nicht null, so wäre sie nicht weniger als die beliebig kleine Zahl α.

Wenn $\sqrt{a}$ zwischen $\frac{r}{s}$ und $\frac{r+1}{s}$ liegt, so liegt $\sqrt{a}\sqrt{a}$ zwischen

---

*) ἄλογος, ἀῤῥητος, surdus. Das letztere Wort, welches bei Leonardo 1202 (liber abaci fol. 160) vorkommt und noch im 18ten Jahrh. gebräuchlich ist, war vermutlich die Übersetzung der arabischen Übersetzung des griechischen Kunstwortes. Die Irrationalität ist von der Pythagoreischen Schule bemerkt worden und bei Plato Gegenstand mehrfacher Betrachtung. Eine ausführliche Abhandlung über die Irrationalen liegt im 10ten Buche von Euclids Elementen vor. Aus dieser Quelle wurden die Sätze von den Wurzeln abgeleitet.

$\frac{r^2}{s^2}$ und $\frac{(r+1)^2}{s^2}$, wie a. Die Differenz $\frac{(r+1)^2 - r^2}{s^2}$ ist beliebig klein bei hinreichend großem s, also $\sqrt{a}\sqrt{a} = a$.

3. Wenn $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ beliebig klein, und $p, q, r, \ldots$ gegeben sind, so ist $p\alpha + q\beta + r\gamma + \ldots$ bei endlicher Menge von Gliedern beliebig klein. Bei n Gliedern und bei gegebenem ε nehme man

$$\alpha < \frac{\varepsilon}{np}, \quad \beta < \frac{\varepsilon}{nq}, \quad \gamma < \frac{\varepsilon}{nr}, \ldots$$

so ist $p\alpha + q\beta + r\gamma + \ldots < \varepsilon$.

4. Wenn a, b irrational sind, so ist*)

$$b + a = a + b, \quad ba = ab$$

wie bei rationalen Zahlen (§. 2, 3. §. 3, 3. §. 11, 4. §. 12, 1). Unter der Voraussetzung, daß a, b bei beliebig kleinen α, β zwischen den rationalen A und $A + \alpha$, B und $B + \beta$ liegen, hat man

$$B + A < b + a < B + \beta + A + \alpha$$

$$BA < ba < (B + \beta)(A + \alpha) = BA + B\alpha + (A + \alpha)\beta$$

Die Differenzen der Grenzen $\alpha + \beta$, $B\alpha + (A + \alpha)\beta$ sind beide beliebig klein (3). Zwischen denselben Grenzen liegen auch $a + b$, ab. Also sind $b + a$, ba von $a + b$, ab nicht verschieden (2).

5. Die Quadratwurzel eines Produkts ist das Produkt der Wurzeln von den Faktoren.

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

Beweis. $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2$ ist das Produkt der Faktoren $\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{a}\sqrt{b}$ (§. 4) oder der Faktoren $\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{b}$ (4) d. i. ab, der Radikandus (§. 15, 1).

Weil $12 = 4 \cdot 3$, so ist $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
Weil $63 = 9 \cdot 7$, so ist $\sqrt{63} = 3\sqrt{7}$
Weil $75 = 25 \cdot 3$, so ist $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$, u. s. w.

$$2\sqrt{7} = \sqrt{4}\sqrt{7} = \sqrt{28}, \quad \sqrt{3}\sqrt{5} = \sqrt{15}, \quad \sqrt{3}\sqrt{15} = 3\sqrt{5}$$

Die Brüche $\frac{a}{\sqrt{b}}$ und $\frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$ werden einfacher ausgedrückt, indem man den Nenner und den Zähler des einen mit $\sqrt{b}$, des andern mit $\sqrt{b} - \sqrt{c}$ multipliciert:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}, \quad \frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b} - \sqrt{c})}{b - c}$$

*) Das Rechnen mit irrationalen Zahlen ist auf obige Art sichergestellt worden von J. H. T. Müller Allg. Arithm. 1838, 3ter Abschn. Vergl. Dedekind Stetigkeit und irrationale Zahlen 1872. Lipschitz Analysis 1877 t. 1 p. 28 ff. Cantor Math. Ann. 20 p. 121. Harnack Elem. der Diff. und Int. Rechnung 1881 p. 5 ff. Pasch Einleitung in die Diff. und Int. Rechnung 1882 p. 1 ff.

6. Die Quadratwurzel eines Bruches ist der Quotient der Wurzel des Zählers durch die Wurzel des Nenners.

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Beweis. $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt{b}\sqrt{b}} = \frac{a}{b}$

$$\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{15}{21}} = \sqrt{\frac{5}{7}}$$

Die Quadratwurzel eines gemeinen Bruches wird am leichtesten berechnet, nachdem man den Bruch in einen Decimalbruch verwandelt hat:

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{0{,}666..}, \text{ bequemer als } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Die Quadratwurzel eines allgemeinen Bruches wird einfacher dargestellt, indem man den Bruch so umformt, daß der Nenner oder der Zähler ein Quadrat wird:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}, \quad \sqrt{\frac{7}{12}} = \sqrt{\frac{21}{36}} = \frac{\sqrt{21}}{6}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{a^2}{ab}} = \frac{a}{\sqrt{ab}}$$

7. Die Quadratwurzel eines Polynomium ist von dem Aggregat der Wurzeln der einzelnen Glieder verschieden.

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} < \sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

weil $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 < a + b < (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$. Es ist aber

$$\sqrt{x} \pm \sqrt{y} = \sqrt{(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2} = \sqrt{x + y \pm 2\sqrt{xy}}$$

also z. B.

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b} = \sqrt{2a + 2\sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b} = \sqrt{2a - 2\sqrt{a^2 - b^2}}$$

woraus durch Addition und Subtraktion folgt:

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{2}}$$

$$\sqrt{a-b} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{2}} - \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{2}}$$

Beispiel. $\sqrt{8 + 2\sqrt{15}} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$

a	8	$a^2 - b^2$	4
b	$2\sqrt{15}$	$\sqrt{a^2 - b^2}$	2
a^2	64	$\frac{1}{2}(a + \sqrt{\ })$	5
b^2	60	$\frac{1}{2}(a - \sqrt{\ })$	3

Die Quadratwurzel eines Polynomium kann gliedweise nach der Methode entwickelt werden, welche zur Berechnung der Quadratwurzel einer Decimalzahl dient (§. 15, 3. Vergl. §. 12, 4).

8. Jede Quadratwurzel ist zweideutig (biformis), d. h. ihr Wert kann sowohl positiv als negativ genommen werden. Wenn b ein Wert von $\sqrt{a}$ ist, so ist auch $-b$ ein Wert von $\sqrt{a}$, weil $(-b)^2 = b^2$ (§. 9, 2).

$\sqrt{49} = \pm 7$, $\sqrt{a^2} = \pm a$. Das Doppelzeichen wird nötig, sobald man das Wurzelzeichen nicht mehr schreibt. Das Produkt von Wurzeln $\sqrt{a}\sqrt{b}$ ist zweideutig wie $\sqrt{ab}$ (1), nur $\sqrt{a}\sqrt{a} = a$ ist eindeutig. Die Summe $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ist vierdeutig.

9. Die Quadratwurzeln negativer Zahlen sind imaginär, d. h. sie können durch Multiplikation und Division aus der irreduciblen $\sqrt{-1}$ abgeleitet werden, welche die positive oder negative imaginäre Einheit genannt und durch $\pm i$ bezeichnet wird*). Nach (5) setzt man $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$ auch in dem Falle, daß x und y nicht beide positiv sind, also

$$\sqrt{-a} = \sqrt{(-1)a} = \sqrt{-1}\sqrt{a} = i\sqrt{a}$$

$$\sqrt{-81} = \pm 9i, \quad \sqrt{-b^2} = \pm ib, \quad \sqrt{a-b} = i\sqrt{b-a}$$

Die Quadratwurzel der negativen Einheit ist irreducibel, weder 1, noch -1, noch eine von 1 oder -1 verschiedene positive oder negative Zahl, weil die Quadrate dieser Zahlen von -1 verschieden sind.

Die aus 1 und -1 durch Multiplikation und Division abgeleiteten Zahlen heißen reale Zahlen im Gegensatz zu den aus i und $-i$ abgeleiteten imaginären Zahlen. Die Reihe der realen und die Reihe der imaginären Zahlen haben nur die Null gemein. Bei der nach (5) zu verrichtenden Multiplikation und Division imaginärer Zahlen hat man zu beachten, daß

$$i^2 = -1 \qquad i^5 = i^4 i = i$$
$$i^3 = i^2 i = -i \qquad i^6 = i^4 i^2 = -1$$
$$i^4 = i^2 i^2 = 1 \qquad i^7 = i^4 i^3 = -i$$
$$i^8 = i^4 i^4 = 1$$

*) Die imaginären Zahlen sind seit der algebraischen Auflösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen in Betrachtung gezogen worden. Vergl. Klügel math. W. I, p. 37 ff. Man nannte sie „unmöglich", weil sie durch die realen Zahlen nicht ausgedrückt werden können, gleichwie man vor der Einführung der negativen Zahlen Differenzen mit überwiegenden Subtrahenden als unmöglich (falsae) verwarf. Die Ausdrücke real, imaginär kommen zuerst bei Descartes (Géom. III) vor als Prädikate der Wurzeln von Gleichungen. Das Zeichen i ist von Gauß 1801 Disq. arithm. 337 eingeführt worden.

u. s. w. Demnach ist ferner

$$\frac{1}{i} = \frac{i^4}{i} = i^3 = -i$$

$$\frac{1}{i^2} = \frac{i^4}{i^2} = i^2 = -1$$

$$\frac{1}{i^3} = \frac{i^4}{i^3} = i, \text{ u. s. w.}$$

10. I. Die Zahlen, welche die Formel $x + \sqrt{y}$ umfaßt, wenn x eine beliebige reale, y eine beliebige negative reale Zahl bedeutet, sind Binomien von je einem realen und einem imaginären Gliede und werden **komplexe Zahlen** genannt.

Die Formel $a + ib$ umfaßt alle Zahlen, deren die Arithmetik bedarf; sie enthält die reale Zahl a oder die imaginäre Zahl ib, wenn b oder a verschwindet. Alle Zahlen werden zur Übersicht auf eine Ebene so gesetzt, daß die Punkte (Örter) der realen Zahlen auf einer Geraden liegen, die Punkte der positiven Zahlen in der einen Richtung vom Nullpunkt aus, die Punkte der negativen Zahlen in der entgegengesetzten Richtung, und daß die Punkte derjenigen Komplexen, welche das reale Glied a gemein haben, auf einer andern Geraden liegen, welche die erste Gerade in dem Punkte der Zahl a rechtwinkelig durchschneidet. Die Punkte der imaginären Zahlen befinden sich auf der im Nullpunkt errichteten Normale der Geraden, welche die Punkte der realen Zahlen enthält. Eine bestimmte Veränderung einer Zahl wird veranschaulicht durch die Bewegung des Punktes der Zahl auf einem bestimmten Weg.

II. Die **Größe der Zahl** $a + ib$, ihr absoluter Wert, Zahlenwert, Betrag, Modul, bezeichnet durch $|a + ib|$ wird durch die Distanz angegeben, welche der Punkt der Zahl $a + ib$ auf der Zahlenebene vom Nullpunkt hat, also nach dem Pythagoreischen Satz durch die positive Quadratwurzel von $a^2 + b^2$. Z. B.

$$|2| = |-2| = |2i| = |-2i| = 2, \quad |3 + 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Die Zahlen $a + ib$, $a - ib$, $-a + ib$, $-a - ib$ sind von gleicher Größe, welche sowohl die Größe von a als auch die Größe von b übertrifft. Auf einem um den Nullpunkt beschriebenen Kreis liegen unendlich viel Zahlen gleichen Betrages, darunter 2 reale und 2 imaginäre.

III. Man rechnet mit dem Binomium $x + \sqrt{y}$ bei negativem y wie mit dem realen Binomium $x + \sqrt{y}$ bei positivem y. Daher ist unter der Summe oder der Differenz der komplexen Zahlen $a + ib$ und $c + id$ die komplexe $a \pm c + i(b \pm d)$ zu verstehen. Die Differenz von 2 komplexen verschwindet nur dann, und die beiden komplexen sind nur dann einander gleich, wenn das reale Glied der einen dem realen

Glied der andern, und zugleich das imaginäre Glied der einen dem imaginären Glied der andern gleich ist. Die Größe der Differenz $c + id - (a + ib)$ d. i. $c - a + i(d - b)$ ist die Hypotenuse der Katheten $c - a$ und $d - b$, der Abstand des Punktes $c + id$ von dem Punkt $a + ib$. Vergl. unten §. 31, 11.

Die Multiplikation mit einer komplexen Zahl besteht aus den Multiplikationen mit ihren Gliedern, so daß

$$\begin{aligned}(a + ib)(c + id) &= ac + ibc + iad - bd \\ &= ac - bd + i(bc + ad) \\ (a + ib)(a - ib) &= a^2 + b^2\end{aligned}$$

Die komplexen $a + ib$ und $a - ib$, deren Summe und Produkt real ist, heißen konjugiert; die reale Zahl $a^2 + b^2$, welche durch $a + ib$ und durch $a - ib$ teilbar ist, heißt die Norm der konjugierten komplexen $a + ib$ und $a - ib$, das Quadrat ihres Modul. Die Summe der konjugierten komplexen

$$\begin{aligned}&(\alpha + i\beta)(a + ib)^2 + (\alpha - i\beta)(a - ib)^2 \\ &= 2\alpha a^2 - 4\beta ab - 2\alpha b^2 = \frac{2}{\alpha}(\alpha^2 a^2 - 2\alpha\beta ab - \alpha^2 b^2) \\ &= \frac{2}{\alpha}\left\{(\alpha a - \beta b)^2 - (\alpha^2 + \beta^2)b^2\right\}\end{aligned}$$

enthält ein positives und ein negatives reales Glied.

Die Norm des Produkts komplexer Zahlen ist das Produkt ihrer Normen, weil $pq \,.\, p'q' = pp' \,.\, qq'$; in der That ist für das obige Beispiel

$$(ac - bd)^2 + (bc + ad)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

Die Division durch eine komplexe Zahl kann in die Multiplikation mit der konjugierten Zahl verwandelt werden, wenn man durch die Norm dividiert, weil

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

Die positive Quadratwurzel einer komplexen Zahl ist nach (7)

$$\begin{aligned}\sqrt{a + ib} &= \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \\ \sqrt{a - ib} &= \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\end{aligned}$$

wenn die Quadratwurzeln positiv genommen werden.

IV. Der Modul einer Summe (Differenz) liegt zwischen der Differenz und der Summe der Moduln der Glieder:

$$p = a + ib, \quad q = c + id$$
$$|p| - |q| < |p \pm q| < |p| + |q|$$

Denn $|p \pm q|^2 = (a \pm c)^2 + (b \pm d)^2$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \pm 2(ac + bd)$$

Nun ist
$$(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$
$$(ac + bd)^2 < (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

Daher liegt $ac + bd$ zwischen
$$-\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \text{ und } +\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$$
und folglich liegt $(a \pm c)^2 + (b \pm d)^2$ zwischen
$$\left(\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{c^2 + d^2}\right)^2 \text{ und } \left(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}\right)^2$$

Überhaupt werden die verschiedenen Werte einer mehrdeutigen irrationalen Formel konjugiert genannt. Das Produkt derselben ist rational und heißt die Norm der irrationalen Formel. Z. B. $a + \sqrt{x}$ und $a - \sqrt{x}$ sind konjugierte irrationale Formeln, deren Norm $a^2 - x$. Vergl. Algebra §. 10.

Die komplexen Zahlen waren, obgleich bereits D'Alembert und Euler 1746 deren Nutzen bei vielen Untersuchungen gezeigt hatten, doch mehr geduldet geblieben als anerkannt, bis Gauß den allgemeinsten Begriff der Zahl durch Veranschaulichung feststellte. Gött. gel. Anz. 1831, April 23. Vergl. Theor. resid. biq. 30, wo die Ausdrücke „komplexe Zahl, Norm derselben" zuerst vorkommen, und den seit 1880 gedruckten Brief Gauß an Bessel 1811 Dec. 18. Cauchy hatte 1821 (Anal. algébr. c. 7) die Formeln $a + ib$, $a - ib$ „konjugiert" und die positive Quadratwurzel ihres Produkts ihren „Modulus" genannt. Die Bezeichnung $|a + ib|$ ist von Weierstraß eingeführt worden. Früher waren von Argand 1806 u. a. reale Strecken von bestimmter Richtung und Länge (lignes dirigées) als „signes" der nicht realen Zahlen versucht worden. Vergl. meinen Aufsatz Crelle J. 94 p. 87.

§. 17. Lehrsätze von den Potenzen.

(Beis §§. 36. 37. 38. 34. 35. 39.)

1. Um ein Produkt zu potenzieren, hat man jeden Faktor desselben zu potenzieren:

$$(ab)^m = a^m b^m$$

Denn $(ab)^m$ ist das Produkt von m Faktoren ab (§. 4) in beliebiger Ordnung (§. 3, 3), also das Produkt von m Faktoren a mit m Faktoren b.

Nach dieser Regel werden negative und imaginäre Zahlen potenziert. Weil $-a = (-1)a$, so ist $(-a)^m = (-1)^m a^m$. Die Potenzen

von -1 sind 1 oder -1, je nachdem der Exponent gerade oder ungerade (§. 9, 3). Ebenso hat man $(ia)^m = i^m a^m$. Vergl. §. 16, 9.

2. Um einen Bruch zu potenzieren, hat man den Zähler und den Nenner desselben zu potenzieren:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Denn die gesuchte Potenz ist das Produkt von m Faktoren $\frac{a}{b}$ d. i. das Produkt von m Faktoren a dividiert durch das Produkt von m Faktoren b (§. 11, 5).

Insbesondere ist

$$\left(\frac{1}{b}\right)^m = \frac{1}{b^m}$$

3. Um eine Potenz zu potenzieren, hat man den Exponenten derselben zu multiplicieren:

$$(a^b)^c = a^{bc} = (a^c)^b$$

Denn die gesuchte Potenz ist das Produkt von c Faktoren a^b, also von bc Faktoren a, weil a^b das Produkt von b Faktoren a ist. Ebenso ist $(a^c)^b$ das Produkt von cb $(= bc)$ Faktoren a.

Dagegen bedeutet a^{b^c} eine Potenz, deren Dignandus a und deren Exponent b^c ist.

4. Um Potenzen desselben Dignandus zu multiplicieren, hat man ihre Exponenten zu addieren:

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

Denn das gesuchte Produkt hat $m + n$ Faktoren a.

5. Um eine Potenz durch eine Potenz desselben Dignandus zu dividieren, hat man den Exponenten des Divisor von dem Exponenten des Dividendus zu subtrahieren:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

Wenn $m > n$, so kann man den Dividendus und den Divisor durch a^n dividieren und behält $m - n$ Faktoren a. Wenn $m = n$, so ist der Quotient 1. Wenn $m < n$, so kann man den Dividendus und den Divisor durch a^m dividieren und behält im Dividendus 1, im Divisor $n - m$ Faktoren a.

6. Die Potenz a^{m-n} wird durch den Quotienten $a^m : a^n$ auch dann erklärt, wenn der Exponent null oder negativ ist. Hiernach ist

$$a^0 = a^{m-m} = a^m : a^m = 1$$

unter Voraussetzung eines endlichen Dignanden a (§. 11, 8). Und

$$a^{-k} = a^{m-(m+k)} = \frac{a^m}{a^{m+k}} = \frac{1}{a^k} = \left(\frac{1}{a}\right)^k$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-k} = \left(\frac{b}{a}\right)^k$$

d. h. um mit einer ganzen Zahl zu potenzieren, kann man den reciproken Dignanden mit der entgegengesetzt gleichen Zahl potenzieren.

7. Die Sätze (1) bis (5) über die Rechnung mit Potenzen gelten auch dann, wenn die Exponenten negativ sind.

$$(ab)^{-m} = a^{-m}b^{-m}, \text{ weil } \left(\frac{1}{ab}\right)^m = \left(\frac{1}{a}\right)^m\left(\frac{1}{b}\right)^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}}, \text{ weil } \left(\frac{b}{a}\right)^m = \left(\frac{1:a}{1:b}\right)^m = \left(\frac{1}{a}\right)^m : \left(\frac{1}{b}\right)^m$$

$$(a^b)^{-c} = a^{-bc}, \text{ weil } \left(\frac{1}{a^b}\right)^c = \frac{1}{a^{bc}}$$

$$a^m a^{-n} = a^{m-n}, \text{ weil } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^{-m}a^{-n} = a^{-(m+n)}, \text{ weil } \left(\frac{1}{a}\right)^m\left(\frac{1}{a}\right)^n = \left(\frac{1}{a}\right)^{m+n}$$

Die erste Spur einer Rechnung mit Exponenten findet sich in Archimedes' ψαμμίτης 10. Vergl. Nesselmann Alg. d. Griechen p. 124. Negative Exponenten hat zu demselben Zweck Stifel (arithm. fol. 250) angewendet. Noch weiter gingen Stevin 1585 (Klügel math. W. I p. 43) und die Erfinder der Logarithmen. Der umfassendere Begriff der Potenz ist besonders von Newton ausgebildet worden. Vergl. dessen Brief für Leibniz 1676 Jun. 13.

§. 18. Die Wurzel.

(Beis §§. 41. 42. 43. 45. 46. 44. 47. 48.)

1. Die $m$te Wurzel einer Zahl ist die Zahl, welche mit m (dem Wurzel-Exponenten) potenziert die gegebene Zahl (den Radikandus) giebt, so daß

$$\text{Wurzel}^{\text{W. Expon.}} = \text{Radikandus}, \quad \sqrt[m]{a^m} = a$$

Der Wurzelexponent wird über das Wurzelzeichen (§. 15, 1) geschrieben*). Die 2te Wurzel heißt Quadratwurzel, der Wurzelexponent 2 wird weggelassen; die 3te Wurzel heißt Kubikwurzel.

*) Besondere Wurzelzeichen kommen noch im Anfang des 16ten Jahrh. z. B. bei Christ. Rudolff vor, während andere bereits anfingen, den Exponenten neben oder über das Wurzelzeichen zu setzen.

$$\sqrt[3]{8} = 2, \text{ weil } 2^3 = 8$$

$$\sqrt[4]{10000} = 10, \text{ weil } 10^4 = 10000$$

$$\sqrt[m]{a^m} = a, \quad \sqrt[m]{a^{mn}} = a^n$$

Um die 3te, 5te, .. Wurzel einer Decimalzahl zu berechnen, kann man von der Betrachtung der 3ten, 5ten, .. Potenz einer Decimalzahl ausgehen, und ähnlich wie in §. 14 und 15 verfahren. Leichtere Mittel zur Erreichung dieses Zwecks innerhalb gegebener Rechnungsgrenzen bieten die Logarithmen dar.

2. Wenn der Wurzelexponent ein Produkt rs ist, so kann die Wurzel reduciert werden, indem man die $s$te Wurzel der $r$ten Wurzel oder die $r$te Wurzel der $s$ten Wurzel des Radikandus nimmt:

$$\sqrt[rs]{a} = \sqrt[s]{\sqrt[r]{a}} = \sqrt[r]{\sqrt[s]{a}}$$

Denn nach §. 17, 3 hat man

$$\sqrt[s]{\sqrt[r]{a^{rs}}} = \left(\sqrt[s]{\sqrt[r]{a^s}}\right)^r = \sqrt[r]{a^r} = a$$

$$\sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}}, \quad \sqrt[6]{a} = \sqrt[3]{\sqrt{a}}, \quad \sqrt[15]{a} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{a}}$$

$$\sqrt[rs]{a^{rt}} = \sqrt[s]{\sqrt[r]{a^{rt}}} = \sqrt[s]{a^t}$$

d. h. die Wurzel einer Potenz bleibt unverändert, wenn man beide Exponenten durch dieselbe Zahl dividiert oder mit derselben Zahl multipliciert.

3. Die Wurzel eines Produkts ist das Produkt der Wurzeln der einzelnen Faktoren:

$$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}$$

Denn nach §. 17, 1 ist

$$\left(\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\right)^m = \sqrt[m]{a}^m \sqrt[m]{b}^m = ab$$

4. Die Wurzel eines Bruches ist der Quotient der Wurzel des Zählers durch die Wurzel des Nenners:

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$$

Denn nach §. 17, 2 ist $\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m = \frac{\sqrt[m]{a}^m}{\sqrt[m]{b}^m} = \frac{a}{b}$

Man kann den gegebenen Bruch so umformen, daß sein Nenner eine $m$te Potenz wird, und erhält

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \sqrt[m]{\frac{ab^{m-1}}{b^m}} = \frac{\sqrt[m]{ab^{m-1}}}{b}, \quad \sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{\frac{6}{8}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{2}$$

Ein Bruch mit dem Nenner $\sqrt[m]{b} + \sqrt[m]{c}$ kann den Nenner $b - c$ oder $b + c$ erhalten, je nachdem m gerade oder ungerade ist (§. 12, 5).

Wenn r und s relative Primzahlen, x und y aber solche Zahlen sind, daß $rx - sy = 1$, so hat man

$$\sqrt[rs]{a} = \sqrt[rs]{a^{rx-sy}} = \sqrt[rs]{(a^{rx} : a^{sy})} = \sqrt[rs]{a^{rx}} : \sqrt[rs]{a^{sy}} = \sqrt[s]{a^x} : \sqrt[r]{a^y}$$

5. Die $m$te Wurzel einer $n$ten Potenz kann reduciert werden, indem man die $m$te Wurzel des Dignanden mit n potenziert, oder indem man den Exponenten der Potenz durch den Exponenten der Wurzel dividiert:

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m]{a^{-n}} = a^{\frac{n}{m}}$$

Denn nach §. 17, 3 ist

$$\left(\sqrt[m]{a^{-n}}\right)^m = \left(\sqrt[m]{a^{-m}}\right)^n = a^n$$

Und unter der Voraussetzung, daß m in n aufgeht, ist

$$\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^m = a^{\frac{n}{m}m} = a^n$$

6. Die Potenz $a^{\frac{n}{m}}$ wird durch die Wurzel $\sqrt[m]{a^n}$ auch dann erklärt, wenn der Exponent gebrochen ist, also m in n nicht aufgeht. Hiernach kann man die frühern Sätze von den Potenzen mit ganzen Exponenten (§. 17) auch für Potenzen mit gebrochenen Exponenten aufstellen, und somit die bisherigen Sätze von den Wurzeln als besondere Fälle jener Sätze von den Potenzen nachweisen*).

Wenn m und n durch c teilbar sind, so ist

$$a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{n:c}{m:c}} \text{ übereinstimmend mit } \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m:c]{a^{n:c}}$$

Wenn $n = mq + r$, so ist $a^{\frac{n}{m}} = a^{q+\frac{r}{m}} = a^q a^{\frac{r}{m}}$ übereinstimmend mit $\sqrt[m]{a^{mq+r}} = \sqrt[m]{a^{mq}a^r} = \sqrt[m]{a^{mq}}\sqrt[m]{a^r} = a^q\sqrt[m]{a^r}$. Ferner ist

*) Die Wurzeln sind als Potenzen mit gebrochenen Exponenten von Stevin und Newton aufgefaßt worden. Vergl. §. 17, 7.

$(ab)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m}} b^{\frac{1}{m}}$ übereinſtimmend mit $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}$

$(a : b)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m}} : b^{\frac{1}{m}}$ übereinſtimmend mit $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b}$

$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}}$ übereinſtimmend mit $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

$a^{\frac{1}{m}} a^{-\frac{1}{n}} = a^{\frac{n-m}{mn}}$ übereinſtimmend mit $\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{a^{-1}} = \sqrt[mn]{a^n}\sqrt[mn]{a^{-m}}$

$= \sqrt[mn]{a\, a^{n-m}} = \sqrt[mn]{a^{n-m}}$.

Anmerkung. Die Wurzeln von Zahlen über 1 ſind mehr als 1, die Wurzeln von Zahlen zwiſchen 0 und 1 ſind weniger als 1. Die 2te, 3te, 4te, .. Wurzel einer Zahl über oder unter 1 bilden eine bis zu 1 fallende oder ſteigende Reihe, weil

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n+1]{a} = \sqrt[n(n+1)]{a^{n+1}} : \sqrt[n(n+1)]{a^n} = \sqrt[n(n+1)]{a}$$

Nun iſt bei poſitiven ganzen m und poſitiven echtgebrochnen h

$$1 \pm h < \left(1 \pm \frac{h}{m}\right)^m$$

nach §. 12, 6, folglich

$$\sqrt[m]{1 \pm h} < 1 \pm \frac{h}{m}$$

alſo $\sqrt[m]{a}$ oder $a^{\frac{1}{m}}$ bei hinreichend großen m von 1 oder a^0 nicht beträchtlich verſchieden.

7. Die Wurzeln ganzer Zahlen ſind entweder ganz oder irrational (§. 16, 1). Wäre $\sqrt[m]{a}$ ein irreducibler Bruch $\frac{r}{s}$, ſo wäre $\left(\frac{r}{s}\right)^m = \frac{r^m}{s^m} = a$. Weil $\frac{r^m}{s^m}$ irreducibel iſt (§. 13, 6), ſo würde a keine ganze Zahl ſein, gegen die Vorausſetzung. Alſo kann $\sqrt[m]{a}$ durch einen rationalen Bruch nicht genau angegeben werden.

8. Die $m$te Wurzel einer realen oder imaginären Zahl (§. 16, 9) iſt das Produkt einer poſitiven Zahl mit der $m$ten Wurzel der poſitiven oder negativen realen oder imaginären Einheit. Nach (3) ſetzt man unter der Bedingung $a = b^m$

$$\sqrt[m]{\pm a} = b\sqrt[m]{\pm 1}, \quad \sqrt[m]{\pm ia} = b\sqrt[m]{\pm i}$$

Die Wurzeln der verschiedenen Einheiten sind mehrdeutig*) und fallen mit den Wurzeln der Gleichung $x^{4m} - 1 = 0$ zusammen. Vergl. §. 31 und Algebra §. 10.

I. Zu den Werten von $\sqrt[m]{1}$ gehört 1 unbedingt, weil $1^m = 1$; -1, wenn m gerade, weil $(-1)^m$ in diesem Falle 1 ist; $\pm i$, wenn 4 in m aufgeht, weil $(\pm i)^m$ in diesem Falle 1 ist. Die Werte von $\sqrt[m]{-1}$ befinden sich unter den Werten von $\sqrt[2m]{1}$, weil

$$\sqrt[m]{-1}^{2m} = \left(\sqrt[m]{-1}^{m}\right)^2 = (-1)^2 = 1$$

Die Werte von $\sqrt[m]{\pm i}$ befinden sich unter den Werten von $\sqrt[4m]{1}$, weil

$$\sqrt[m]{\pm i}^{4m} = \left(\sqrt[m]{\pm i}^{m}\right)^4 = (\pm i)^4 = 1$$

Aus einem Wert von $\sqrt[m]{1}$ findet man (nach §. 16, 10) Werte von $\sqrt[2m]{1}, \sqrt[4m]{1}, \ldots$ z. B.

$$\sqrt[8]{1} = \sqrt[4]{-1} = \sqrt{\pm i} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}} \pm i\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

vierdeutig, die übrigen Werte sind $-i$, i, -1, 1.

II. Bei positiven ganzen k kann ϱ so bestimmt werden, daß ϱ^k eine der Einheiten $1, -1, i, -i$ ist. Wenn k ungerade, so ist

$$1^k = 1, \quad (-1)^k = -1$$

$$i^k \text{ entweder } i^{4p}\, i = i, \text{ oder } i^{4p}\, i^3 = -i$$

$$(-i)^k \text{ entweder } -i \text{ oder } i$$

Wenn k gerade $= \lambda\mu$, wo λ eine Potenz von 2, und μ ungerade, so findet man durch Quadratwurzeln (§. 16, 10)

$$\varrho^\lambda = -1, \text{ folglich } \varrho^k = (-1)^\mu = -1$$

$$\varrho^\lambda = i, \text{ folglich } \varrho^k = i^\mu = i \text{ oder } -i$$

$$\varrho^\lambda = -i, \text{ folglich } \varrho^k = -i^\mu = -i \text{ oder } i$$

III. Um die Werte von $\sqrt[3]{1}$ zu finden, setze man $\sqrt[3]{1} = x$, folglich $x^3 - 1 = 0$. Nun ist $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$. Indem

*) Die Mehrheit der Wurzeln einer Gleichung wurde deutlicher erkannt, nachdem die Auflösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen gelungen war. Vergl. Descartes Géom. III. Die $m$ten Wurzeln von 1 und -1 werden in Cotes' Theorem (Harm. mens. 1722 p. 114) angetroffen, welches die Faktoren von $x^{2m} - 1$ geometrisch (goniometrisch) angiebt. Weit schwieriger war die algebraische Auflösung der Gleichung $x^m - 1 = 0$, d. h. die Darstellung ihrer Wurzeln durch Wurzeln reiner Gleichungen niederer Grade: diese wurde von Vandermonde (Mém. de Paris 1771 Résol. des équat.) gefördert, und von Gauß Disq. arithm. VII. (Werke II p. 243) vollbracht. Vergl. Lagrange Traité des équat. Note 14.

man sowohl $x - 1$ als auch $x^2 + x + 1$ der Null gleichsetzt, erhält man für $x = \sqrt[3]{1}$ außer 1 die Werte

$$-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}, \quad -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}$$

Für $\sqrt[5]{1}$ findet man aus $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$, also aus den Gleichungen

$$x - 1 = 0, \quad \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$$

mit Hilfe der Substitution $x + \frac{1}{x} = u$, $x^2 + \frac{1}{x^2} = u^2 - 2$, außer 1 die Werte

$$-\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1) + \tfrac{1}{4}i\sqrt{10-2\sqrt{5}} \qquad \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1) + \tfrac{1}{4}i\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$
$$-\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1) - \tfrac{1}{4}i\sqrt{10-2\sqrt{5}} \qquad \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1) - \tfrac{1}{4}i\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

9. Unter den Werten der $m$ten Wurzel einer Einheit können solche vorkommen, welche Wurzeln derselben Einheit von geringerem Exponenten sind; z. B. zu den Werten von $\sqrt[6]{1}$, $\sqrt[9]{1}$, .. gehören die Werte von $\sqrt[3]{1}$, weil $\sqrt[3]{1}^{3k} = 1^k = 1$ ist. Die (komplexe) Zahl α heißt eine eigentliche (primitive) $m$te Wurzel einer Einheit, wenn sie nicht zugleich eine Wurzel derselben Einheit von geringerem Exponenten ist, so daß α^k den Radikanden nur dann giebt, wenn m in k aufgeht.

Die Benennung „primitive Wurzel" ist aus der Theorie der Potenzen-Reste (Euler 1773 Nov. Comm. Petrop. 18 p. 89. Vergl. Gauß Disquis. arithm. 57) übertragen von Meier Hirsch algebr. Gleichungen 1809 §. 88. Zur Verhütung von Mißverständnissen hat Gauß (Werke II, p. 243) den Ausdruck eigentliche (propria) Wurzel gewählt. Die folgenden Sätze gründen sich auf die Bemerkungen Eulers (1741 Comm. Petrop. 13 p. 50) und Lagranges (Mém. de Berlin 1770 Réflexions 24. Traité des équat. Note 13).

I. Wenn α eine $m$te Wurzel von 1 und k eine beliebige ganze Zahl ist, so ist auch α^k eine $m$te Wurzel von 1, und α^{m+k} von α^k nicht verschieden. Denn $(\alpha^k)^m = (\alpha^m)^k = 1^k = 1$, $\alpha^{m+k} = \alpha^m \alpha^k = \alpha^k$.

II. Wenn k prim zu m ist, so ist eine von 1 verschiedene $k$te Wurzel von 1 nicht zugleich eine $m$te Wurzel von 1. Man bilde von k nach dem Modul m den Rest p, ferner von m nach p den Rest q, von p nach q den Rest r, u. s. w. Die Reihe dieser Reste geht bis auf 1 herab, weil k prim zu m (§. 13, 3). Eine von 1 verschiedene $k$te Wurzel von 1 wird durch α bezeichnet, so daß $\alpha^k = 1$. Wäre nun zugleich $\alpha^m = 1$, so wäre auch $\alpha^p = 1$, weil

$$\alpha^k = \alpha^{mx+p} = \alpha^{mx}\alpha^p = \alpha^p$$

Ebenso würde man schließen, daß $\alpha^p = 1$, $\alpha^r = 1$, u. s. w., daß

endlich $\alpha = 1$. Dies ist gegen die Voraussetzung, also kann α^m nicht 1 sein.

III. Wenn α eine eigentliche $m$te Wurzel von 1 ist, so sind α, α^2, α^3, .., α^m von einander verschieden. Gesetzt, α^r und α^s wären einander gleich, wobei r und s Zahlen der Reihe 1, 2, .., m bedeuten, so wäre $\alpha^r : \alpha^s = \alpha^{r-s} = 1$, mithin α keine eigentliche $m$te Wurzel von 1. Also sind α^r und α^s verschieden.

IV. Wenn α eine eigentliche $m$te Wurzel von 1 und k prim zu m ist, so ist auch α^k eine eigentliche $m$te Wurzel von 1. Denn $(\alpha^k)^x = \alpha^{kx}$ ist nur dann 1, wenn m in kx aufgeht. Nun ist k prim zu m, also kx nur dann durch m teilbar, wenn m in x aufgeht (§. 13, 4).

V. Wenn α und β eigentliche $m$te und $n$te Wurzeln von 1 sind, und m prim zu n, so ist $\alpha\beta$ eine eigentliche mnte Wurzel von 1 d. h. $(\alpha\beta)^x$ nur dann 1, wenn x durch mn teilbar ist. Ist x durch m teilbar und durch n nicht teilbar, so ist $\alpha^x = 1$, β^x von 1 verschieden, also $(\alpha\beta)^x$ nicht 1. Ist x weder durch m noch durch n teilbar, so sind α^x und $\beta^x = 1 : \beta^{n-x}$ von 1 verschieden. Nun ist α^x eine $m$te Wurzel von 1, und β^{n-x} eine $n$te Wurzel von 1, also α^x von β^{n-x} verschieden (II), folglich $\alpha^x : \beta^{n-x} = \alpha^x\beta^x = (\alpha\beta)^x$ nicht 1.

Z. B. Wenn α eine eigentliche $m$te Wurzel von 1 und m ungerade ist, so ist $-\alpha$ eine eigentliche $2m$te Wurzel von 1, $i\alpha$ eine eigentliche $4m$te Wurzel von 1. Und wenn m durch 3 nicht teilbar ist, so ist $\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})\alpha$ eine eigentliche $3m$te Wurzel von 1, u. s. w.

§. 19. Der Logarithmus.

(Bris §§. 56. 57.)

1. Der a-Logarithmus einer Zahl ist die Zahl, mit welcher a (die Basis) potenziert die Zahl (den Numerus) giebt, so daß

$$\text{Basis}^{\text{Logarithmus}} = \text{Numerus}.$$

Die Basis wird als positiv real und von 1 verschieden vorausgesetzt. Jede positive Zahl x kann als eine Potenz der Basis a vorgestellt werden, der erforderliche Exponent ist der a-Logarithmus der Zahl x und wird durch ${}^a\log x$ bezeichnet.

$${}^2\log 32 = 5, \text{ weil } 2^5 = 32$$
$${}^3\log 9 = 2, \text{ weil } 3^2 = 9$$
$${}^{10}\log 10000 = 4, \text{ weil } 10^4 = 10000$$
$${}^5\log \tfrac{1}{125} = -3, \text{ weil } 5^{-3} = \tfrac{1}{125}$$
$${}^a\log a^m = m, \; {}^a\log 1 = 0$$

Wenn der Numerus b keine Potenz der Basis a mit ganzem Exponenten ist, so kann man den Logarithmus begrenzen. Bei $a > 1$ und beliebig kleinem α ergiebt sich

$$a^A < b < a^{A+\alpha}$$
$$b - a^A < a^{A+\alpha} - a^A = a^A(a_\alpha - 1)$$

Nun sind α, $a^\alpha - 1$ (§. 18, 6), $a^A(a^\alpha - 1)$ beliebig klein, also ${}^a\log b = A$ mit dem beliebig kleinen Fehler α. Vergl. §. 20, 3. Wenn die Basis $a > 1$, so sind die Logarithmen der Nummern über 1 positiv, der Nummern unter 1 negativ, ${}^a\log \infty = \infty$, ${}^a\log 0 = -\infty$ (§. 17, 6. §. 11, 8). Wenn die Basis $a < 1$, so sind die Logarithmen der Nummern über 1 negativ, der Nummern unter 1 positiv, ${}^a\log \infty = -\infty$, ${}^a\log 0 = \infty$. Die Logarithmen negativer Nummern sind nicht real.

2. Nachdem die Zahlen b und c als Potenzen der Basis a mit Hilfe ihrer a-Logarithmen β und γ dargestellt worden sind,

$$b = a^\beta, \quad c = a^\gamma$$

so kann c sofort als Potenz der Basis b dargestellt und der b-Logarithmus von c angegeben werden, weil nach §. 18, 6

$$a = b^{\frac{1}{\beta}}, \quad c = a^\gamma = b^{\frac{\gamma}{\beta}}$$

d. h. der b-Logarithmus von c ist der Quotient des a-Logarithmus von c durch den a-Logarithmus der Basis b:

$${}^b\log c = \frac{{}^a\log c}{{}^a\log b}$$

3. Der Inbegriff der Logarithmen aller Zahlen für eine bestimmte Basis heißt ein Logarithmensystem. Aus einem Logarithmensystem kann man ein anderes Logarithmensystem ableiten, indem man die Logarithmen des gegebenen Systems durch den Logarithmus der Basis des andern Systems dividiert (2). Z. B. die 2-Logarithmen werden erhalten, wenn man die 10-Logarithmen durch ${}^{10}\log 2$ dividiert.

Bei dem gemeinen Rechnen werden die 10-Logarithmen gebraucht, welche deshalb gemeine Logarithmen (vulgares, Briggiani, dekadische) heißen. Bei ihrer Bezeichnung wird die Basis weggelassen.

In der mathematischen Analysis kommen nur die natürlichen Logarithmen (naturales, Neperiani, hyperbolici) in Betracht, deren Basis die irrationale Zahl

$$e = 2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots = 2{,}71828\ldots$$

ist; so genannt, weil sie direkt (ohne Begrenzungen) sich berechnen lassen. Vergl. §. 32. Die Bezeichnungen

$${}^e\log x, \quad \log. \text{nat. } x, \quad \ln x, \quad \lg x, \quad l\, x$$

drücken sämtlich den natürlichen Logarithmus von x aus. Alle andern Logarithmen, z. B. die gemeinen, werden künstliche Logarithmen (artificiosi) genannt, weil (2)

$$^a\log x = \frac{\text{log. nat. } x}{\text{log. nat. } a}, \quad \text{log. vulg. } x = \frac{\text{log. nat. } x}{\text{log. nat. } 10} = 1x \times 0{,}4343$$

Der reciproke natürliche Logarithmus der Basis, mit welchem die natürlichen Logarithmen multipliciert werden müssen, um künstliche Logarithmen zu werden, heißt der Modulus des künstlichen Systems.

Unter Voraussetzung gemeiner Logarithmen ist dagegen

$$\text{log. nat. } x = \frac{\log x}{\log e} = \log x \times 2{,}3026$$

Die Logarithmen (numeri rationem exponentes s. rationum compositarum) sind erfunden und benannt von Neper (Lord John Napier), der in Mirifici logarithmorum canonis descriptio 1614 die natürlichen Logarithmen der Sinus und Tangenten mitteilte. Das gemeine Logarithmensystem wurde von Briggs 1618 eingeführt. Unabhängig von den englischen Erfindungen hat Byrg ein künstliches Logarithmensystem konstruiert (Arithm. u. geometr. Progreß-Tabuln, Prag 1620), indem er die Potenzen der Basis 1,0001 berechnete. Byrgs Tabellen enthielten neben den einzelnen Logarithmen die dazu gehörigen Nummern und waren mithin ein Canon antilogarithmicus nach einem von Wallis (Algebra c. 12) gebrauchten Ausdruck. Vergl. Gieswald über Byrg im Danziger Schulprogramm 1856. Die Quadratur hyperbolischer Sektoren und Segmente mittelst der natürlichen Logarithmen wurde 1668 von Nic. Mercator und von Jac. Gregory gelehrt. Vergl. Klügel math. W. III. p. 531 ff. Der Name „Modulus eines künstlichen Logarithmensystems" ist von Cotes Philos. Trans. 1714 p. 6 zuerst gebraucht worden. Die jetzt übliche Darstellung der Lehre von den Logarithmen scheint durch Euler 1748 (Introd. I. §. 102 ff.) begründet worden zu sein.

4. Der Logarithmus eines Produkts ist die Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren. Für die Basis a ist

$$\log(xy) = \log x + \log y$$

weil $a^{\log x + \log y} = a^{\log x}\, a^{\log y} = xy$ (§. 18, 6).

Anmerkung. Weil $x = x \cdot 1$, $-x = x(-1)$, so ist unter der Voraussetzung $a^z = x$

$$\log x = z + \log 1, \quad \log(-x) = z + \log(-1)$$
$$\log(ix) = z + \log i$$

Davon hat $\log 1$ den realen Wert 0, während $\log(-1)$ und $\log i$ reale Werte nicht haben. Ist aber α ein (imaginärer) Wert von $\log i$ d. h. $a^\alpha = i$, so ist 2α ein Wert von $\log(-1)$, 3α ein Wert von $\log(-i)$, 4α ein Wert von $\log 1$, u. s. w. Die Logarithmen sind unendlichdeutig bestimmt.

5. Der Logarithmus eines Bruches ist die Differenz des Logarithmus des Zählers und des Logarithmus des Nenners. Für die Basis a ist

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$$

weil $a^{\log x - \log y} = a^{\log x} : a^{\log y} = x : y$.

Die Logarithmen reciproker Zahlen sind entgegengesetzt gleich:

$$\log \frac{1}{x} = -\log x, \text{ weil } \log 1 = 0$$

6. Der Logarithmus einer Potenz (im weitern Sinne) ist das Produkt des Logarithmus des Dignanden mit dem Exponenten. Für die Basis a ist

$$\log x^m = m \log x$$

weil $a^{m \log x} = (a^{\log x})^m = x^m$.

$$\log x^3 = 3 \log x, \quad \log x^{-4} = -4 \log x$$

$$\log \sqrt[5]{x^2} = \log x^{\frac{2}{5}} = \tfrac{2}{5} \log x$$

§. 20. Die gemeinen Logarithmen der Decimalzahlen.

(Beis §. 58.)

1. Der gemeine Logarithmus einer Decimalzahl besteht aus einer ohne Rechnung sofort angebbaren positiven oder negativen ganzen Zahl, welche die Kennziffer oder Charakteristik des Logarithmus heißt, und aus einem echten Decimalbruche, der die Mantisse des Logarithmus (mantissa = Zugabe) heißt.

a. Bei positiver Mantisse hat die Kennziffer so viel positive Einheiten, als der Numerus Decimalstellen über den Einern hat, oder soviel negative Einheiten, als der Numerus Nullen vor der höchsten Decimalstelle hat.

Numerus	Logarithmus
1000	3
100	2
10	1
1	0
0,1	— 1
0,01	— 2
0,001	— 3

Da 185,7 zwischen 100 und 1000 liegt, so besteht log 185,7 aus der Kennziffer 2 und einer positiven Mantisse.

Da 0,0346 zwischen 0,01 und 0,1 liegt, so besteht log 0,0346 aus der Kennziffer -2 und einer positiven Mantisse (oder auch aus der Kennziffer -1 und einer negativen Mantisse). Die negative Kennziffer wird nach der positiven Mantisse geschrieben, z. B.

$$0, \ldots -2 = 1, \ldots -3 = .. = 8, \ldots -10$$

b. Umgekehrt schließt man aus der Kennziffer des Logarithmus, bis zu welcher Decimalstelle der Numerus sich erhebt.

Wenn $\log x = 3, \ldots$, so ist $x = \ldots .., ..$ d. h. x hat 3 Decimalstellen über den Einern. Wenn $\log x = 0, \ldots$, so ist $x = ., \ldots$

Wenn $\log x = 0, \ldots -1$, so ist $x = 0, ..$ d. h. x beginnt mit Zehnteln. Wenn $\log x = 0, \ldots -4$, so ist $x = 0{,}000 ..$ und beginnt mit Zehntausendteln.

2. Die Logarithmen von zwei Zahlen, deren Verhältnis eine Potenz von 10 mit einem ganzen positiven oder negativen Exponenten ist, haben einerlei positive Mantissen und unterscheiden sich nur durch die Kennziffern, z. B.

log 132500, log 1325, log 13,25, log 0,1325, log 0,001325, .

Beweis. $\log x$ und $\log (x \,.\, 10^k) = \log x + k$ (§. 19) haben dieselbe positive Mantisse, wenn k eine ganze positive oder negative Zahl ist, weil durch die ganze Zahl k nur die Kennziffer verändert wird.

3. Die Logarithmen rationaler Zahlen sind entweder ganz oder irrational. Wäre $\log x$ durch den irreduciblen Bruch $\frac{r}{s}$ genau ausdrückbar, so müßte $10^{\frac{r}{s}}$ rational, und $10^r = 2^r \,.\, 5^r$ eine $s$te Potenz, also r durch s teilbar sein (§. 13, 10).

Um die Mantissen der Logarithmen beliebiger Zahlen zu bestimmen, braucht man nur die Mantissen der Logarithmen solcher Zahlen zu begrenzen, welche zwischen 1 und 10 liegen, weil z. B. log 3847 und log 3,847 dieselbe Mantisse haben (2).

Diese Begrenzung wird am einfachsten*) erhalten, indem man die Quadratwurzel von 10 berechnet, davon wiederum die Quadratwurzel u. s. f. bis man auf eine Zahl kommt, welche 1 um einen Decimalbruch von unbeträchtlicher Größe übertrifft (§. 18, 6). Aus den Werten von $10^{\frac{1}{2}}$, $10^{\frac{1}{4}}$, $10^{\frac{1}{8}}$, .. läßt sich folgende Tabelle bilden:

---

*) Diese Methode rührt von Long her, der sich der 10ten Wurzeln bediente (Philos. Trans. 1714 p. 52).

Num.	Log.	Num.	Log.
10,000 00	1,000 00	1,002 25	0,000 98
3,162 28	0,500 00	1,001 12	0,000 49
1,778 28	0,250 00	1,000 56	0,000 24
1,333 52	0,125 00	1,000 28	0,000 12
1,154 78	0,062 50	1,000 14	0,000 06
1,074 61	0,031 25	1,000 07	0,000 03
1,036 63	0,015 62	1,000 04	0,000 02
1,018 15	0,007 81	1,000 02	0,000 01
1,009 04	0,003 91	1,000 01	0,000 00
1,004 51	0,001 95		

Um mit Hilfe dieser Tabelle z. B. log 7,2 zu berechnen, dividiere man 7,2 durch den nächst kleinern Numerus der Tabelle 3,16228; den Quotienten 2,27684 durch den nächst kleinern Numerus 1,77828; den Quotienten 1,28036 durch den nächst kleinern Numerus 1,15478, u. s. f. Hiernach wird

$$7{,}2 = 3{,}16228 \times 1{,}77828 \times 1{,}15478 \times \ldots$$

ein Produkt von Zahlen, deren Logarithmen in der Tabelle enthalten sind. Nach §. 19, 4 ist log 7,2 = log 3,16228 + log 1,77828 + . .

4. Um dieser umständlichen Rechnungen für immer überhoben zu sein, hat man ausführlichere logarithmische Tabellen angefertigt, welche die Mantissen der Logarithmen aller Zahlen bis 999 vierstellig, oder bis 9999 fünfstellig, oder bis 99999 siebenstellig, u. s. f. enthalten*).

I. Wenn der Numerus genauer gegeben ist, als er in der Tabelle verzeichnet steht, so muß die Tabelle interpoliert, d. h. es muß die in der Tabelle enthaltene Mantisse korrigiert werden nach dem Satze: „Die Mantissendifferenz ist der Nummerndifferenz desto genauer proportional, je kleiner das Verhältnis der Nummerndifferenz zum Numerus ist." Vergl. §. 32 und Algebra §. 2, 4.

Z. B. log 1457 fällt zwischen log 1450 und log 1460, deren Differenz laut Tabelle 30 Zehntausendtel beträgt. Wenn der Numerus um 10, 1, 7 wächst, so wächst der Logarithmus um 30, $\frac{30}{10}$, $\frac{30 \cdot 7}{10}$ Zehntausendtel. Also ist log 1457 = 3,1614 + 0,0021 = 3,1635.

log 14576 wird berichtigt, indem man log 14500 um $\frac{30 \cdot 76}{100}$ Zehntausendtel vermehrt. Ebenso findet man mit Rücksicht auf (1) und (2) log 68,707 = 1,8370; log 0,03754 = 0,5745 — 2.

*) Vierstellige Logarithmen von J. H. T. Müller, 5stellige von Hoüel, 6stellige von Bremiker, 7stellige von Schrön. Um die erste Anfertigung der logarithmischen Tabellen haben sich besondere Verdienste erworben Ursinus, Keppler, Briggs, Vlacq u. a. Vergl. Klügel math. W. 3 p. 530 ff.

II. Wenn der Logarithmus einer Zahl gegeben ist, so läßt sich die Zahl aus derselben Tabelle mit bestimmter Genauigkeit angeben.

Z. B. $\log x = 2{,}3489$. Aus der Kennziffer schließt man, daß $x = \ldots,\ldots$ Die Mantisse fällt laut Tabelle zwischen die Mantissen von log 2230 und log 2240. Wenn die Mantisse um 19, 1, 6 Zehntausendtel wächst, so wächst der Numerus um 10, $\frac{10}{19}$, $\frac{10 \cdot 6}{19}$. Also ist $x = 223{,}3$.

$\log x = 6{,}1819$ giebt $x = 1520_{000}$ mit unbestimmten Hunderten.
$\log x = 0{,}8362 - 3$ giebt $x = 0{,}006858$

Wenn $\log x = -5{,}8794$ ist, so macht man durch Addition von 6 die Mantisse positiv und subtrahiert wiederum 6. Aus $\log x = 0{,}1206 - 6$ findet man dann $x = 0{,}000\,001\,320$. Setzt man $\log y = 5{,}8794$, so erhält man $y = 757\,5_{00}$ und (§. 19, 5) $x = \frac{1}{757\,5_{00}}$

§. 21. Berechnung von Formeln mittelst der Logarithmen.

(Beis §. 59.)

1. Zusammengesetztere Formeln werden berechnet, indem man zuerst die Logarithmen derselben und dann die zugehörigen Nummern bestimmt. Dieses Verfahren findet am einfachsten bei Produkten, Quotienten, Potenzen und Wurzeln Anwendung (§. 19, 4—6).

28,936 . 0,007803 . 256,84 wird durch folgende Rechnung gefunden:

log 28,..	1,4614
+ log 0,007..	0,8923 — 3
+ log 256,..	2,4097
log Prod.	1,7634
Prod.	58,00

1,3802 : 73,257 wird wie folgt berechnet:

log 1,3..	0,1399
— log 73,..	1,8648
log Quot.	0,2751 — 2
Quot.	0,01884

Um der Subtraktion willen wird 2 im Minuenden addiert und von der Differenz subtrahiert.

$3{,}428^{27}$ wird wie folgt berechnet:

log 3,..	0,5350 . 27
	10,700
	3 745
log Pot.	14,445
Pot.	279 Billionen

Größere Genauigkeit wird nur durch genauere Tabellen erreicht.

$\sqrt[7]{0{,}098756^3}$ wird wie folgt berechnet:

log 0,09..	(0,9946—2) . 3
	2,9838—6
	(3,9838—7) : 7
log Wurz.	0,5691—1
Wurz.	0,3707₆

Um der Division willen wird der Subtrahendus (die negative Kennziffer) und der Minuendus um gleichviel vermehrt.

$1{,}238^{-5}$ wird wie folgt berechnet:

log 1,2..	0,0927 (— 5)
	— 0,4635
log Pot.	0,5365 —1
Pot.	0,3439

2. Wenn die Logarithmen der Glieder eines Binomium gefunden sind, so läßt sich der Logarithmus des Binomium direkt durch die Gaußsche Hilfstabelle*) ermitteln. Diese Tabelle enthält zu jedem positiven Werte von $\log x - \log y$ d. i. $\log \frac{x}{y}$ (Kolumne A) die zugehörigen Werte von

$$\log\left(1 + \frac{y}{x}\right) \text{ und } \log \frac{1}{1 - \frac{y}{x}}$$

(Kolumne S und U). Der erste dieser Werte zu $\log x$ addiert giebt $\log(x + y)$, der zweite von $\log x$ subtrahiert giebt $\log(x - y)$. Denn (§. 19)

---

*) Das Original dieser Tabelle, durch welche ein von Leonelli (Supplément logarithmique 1803) gemachter Entwurf zur Ausführung gelangte, ist in Zachs monatl. Korresp. 1812 Nov. Band 26 p. 498 und in Vegas math. Tafeln herausgegeben von Hülße 1840 enthalten. Mit der Gaußschen Kolumne B stimmt die Müllersche Kolumne S; dagegen giebt die Gaußsche Tabelle in der Kolumne C (statt der Müllerschen Kolumne U) die Werte von $\log\left(1 + \frac{x}{y}\right)$, so daß man in jeder Zeile $C = A + B$ hat.

$$\log(x+y) = \log x\left(1+\frac{y}{x}\right) = \log x + \log\left(1+\frac{y}{x}\right)$$

$$\log(x-y) = \log x\left(1-\frac{y}{x}\right) = \log x - \log\frac{1}{1-\frac{y}{x}}$$

Wenn die unter A verzeichneten Zahlen eine von 0 an steigende Reihe bilden, so bilden die unter S und U daneben stehenden Zahlen bis auf 0 fallende Reihen, jene von $\log 2$ ab, diese von ∞ ab. Wenn $\log\frac{x}{y}$ wächst, also auch $\frac{x}{y}$, so fällt $\frac{y}{x}$, also auch $\log\left(1+\frac{y}{x}\right)$; zugleich wächst $1-\frac{y}{x}$, folglich fällt $\log\frac{1}{1-\frac{y}{x}}$. Wenn $\log\frac{x}{y}=0$ d. h. $\frac{x}{y}=1$, so ist $\log\left(1+\frac{y}{x}\right)=\log 2$ und $\log\frac{1}{1-\frac{y}{x}}$ unendlich. Ist $\log\frac{x}{y}$ beträchtlich groß, so ist $\frac{x}{y}$ beträchtlich groß, $\frac{y}{x}$ ein kleiner echter Bruch, also sind $\log\left(1+\frac{y}{x}\right)$ und $\log\frac{1}{1-\frac{y}{x}}$ nahe 0.

Z. B. $\log a = 0{,}3177-1$; $\log b = 0{,}17325-1$. Die Differenz $\log a - \log b = 0{,}14445$ wird in A aufgesucht; daneben findet man in S oder U die Zahl, welche zu $\log a$ addiert oder von $\log a$ subtrahiert $\log(a+b)$ oder $\log(a-b)$ giebt. Das neben $A=0{,}144$ stehende $S=0{,}2350$ um $\frac{4\cdot 45}{100}$ Zehntausendtel und $U=0{,}5494$ um $\frac{25\cdot 45}{100}$ Zehntausendtel vermindert giebt die zu $A=0{,}14445$ gehörigen Werte $S=0{,}2348$ und $U=0{,}5483$, so daß

$$\log(a+b) = 0{,}3177-1+0{,}2348 = 0{,}5525-1$$
$$\log(a-b) = 0{,}3177-1-0{,}5483 = 0{,}7694-2$$

Wenn $\log m = -A$, so ist $\log(1+m)=S$, $\log(1-m)=-U$.

Berechnung von $\sqrt[16]{\frac{43+5\sqrt[3]{278}}{\sqrt[5]{17}}}$

log 43	1,6335	S	0,2453
log 278	2,4440 : 3	log Divd.	1,8788
	0,8147	log 17	1,2304 : 5
log 5	0,6990	log Divs.	0,2461
		log Quot.	1,6327 : 16
$\log \sqrt[3]{5}$	1,5137	log Form.	0,10204
A	0,1198	Form.	1,265

Wenn $\log \operatorname{tang}^2 \alpha = c$, $\log \cot^2 \alpha = -c$, so findet man $\log (1 + \cot^2 \alpha)$ d. i. $\log \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, indem man c unter A aufsucht und den nebenstehenden Wert von S nimmt. Bestimmt man α so, daß $\log \operatorname{tang} \alpha = \frac{1}{2} A$, so giebt $-2 \log \sin \alpha$ den zu A gehörigen Wert von S. Demnach konnten Gauß' Hilfstabellen aus den vorhandenen Tabellen der Logarithmen der goniometrischen Funktionen abgeleitet werden. Durch die Hilfstabellen ist die sonst übliche Benutzung von sogenannten Hilfswinkeln überflüssig gemacht.

§. 22. Die geometrische Progression. Zusammengesetzte Zinsrechnung und Rentenrechnung.

(Heis §§. 83. 84.)

1. Von einer Reihe von Größen sagt man, daß sie eine **geometrische Progression** bilden, wenn die Verhältnisse der auf einander folgenden Größen einander gleich sind. Ist a das Anfangsglied, v das Verhältnis eines andern Gliedes zum vorhergehenden, so ist die geometrische Progression bis zum $n$ten Gliede folgende:

$$a,\ av,\ av^2,\ av^3,\ \ldots,\ av^{n-1}$$

Insbesondere sind die folgenden Potenzen einer Zahl Glieder einer geometrischen Progression und von den griechischen Mathematikern als solche betrachtet worden. Die Progression ist **steigend** oder **fallend**, je nachdem das Verhältnis mehr oder weniger als 1 beträgt. Die Glieder der Progression haben abwechselnde Zeichen, wenn das Verhältnis negativ ist.

2. Die Summe der geometrischen Progression ist die Differenz des überletzten und des Anfangsgliedes dividiert durch die Differenz des Verhältnisses und 1. Denn aus

$$s = a + av + av^2 + \ldots + av^{n-1}$$
$$sv = \quad av + av^2 + \ldots + av^{n-1} + av^n$$

folgt durch Subtraktion

$$sv - s = av^n - a$$
$$s = \frac{av^n - a}{v - 1} = \frac{a - av^n}{1 - v}$$

in Übereinstimmung mit §. 12, 5. Ebendaselbst ist auch die Summe der unendlichen fallenden Progression angegeben:

$$a + av + av^2 + \ldots \text{ inf.} = \frac{a}{1 - v} \quad (v < 1)$$

3. Wenn ein Kapital zu p Procent jährlichen Zinsen angelegt ist, und die Zinsen jährlich kapitalisiert d. h. zu Vermehrung des Kapitals angewandt werden, so bilden die Werte des Kapitals nach 1, 2, 3, .. Jahren eine geometrische Progression, deren Verhältnis $1{,}0p$ d. i. $1 + \frac{p}{100}$. Denn in 1 Jahre wachsen

100	Einheiten	Kap.	zu	$100 + p$	Einheiten
1	"	"	"	$1{,}0p$	"
c	"	"	"	$c \,.\, 1{,}0p$	"

Aus $c \,.\, 1{,}0p$ Einheiten werden wiederum in 1 Jahre $c \,.\, 1{,}0p^2$ Einheiten u. s. f.; also erwachsen aus c Einheiten in 1 Jahre $c \,.\, 1{,}0p$, in 2 Jahren $c \,.\, 1{,}0p^2$, in 3 Jahren $c \,.\, 1{,}0p^3$, .., in n Jahren $c \,.\, 1{,}0p^n$ Einheiten.

Wenn das Kapital n Jahre und t Tage angelegt ist, so erhalten während des letzten Zeitraums 100 Einheiten den Wert von $100 + \frac{pt}{360}$ Einheiten. Demnach hat das Kapital c nach n Jahren und t Tagen den Wert

$$c \,.\, 1{,}0p^n \left(1 + \frac{pt}{36\,000}\right)$$

Wenn dagegen die Zinsen nach jedem $m$ten Teile eines Jahres kapitalisiert werden, so nehme man den $m$ten Teil des Jahres als Zeiteinheit und vertausche p mit $p : m$. Das Kapital c hat nach 1, 2, 3, .. Zeiteinheiten die Werte

$$c\left(1 + \frac{p}{100m}\right),\ c\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^2,\ c\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^3, \ldots$$

4. Mit Hilfe der gefundenen Formeln werden die Aufgaben der zusammengesetzten Zinsrechnung gelöst: den Wert anzugeben, welchen ein Kapital bei gegebener Verzinsung nach oder vor gegebener Zeit hat; die Zeit anzugeben, in welcher ein Kapital bei gegebener Verzinsung einen bestimmten Wert erhalten hat; die Verzinsung anzugeben, durch welche ein Kapital in gegebener Zeit einen bestimmten Wert erreicht.

Wenn das Kapital c nach n Jahren und t Tagen bei jährlicher Kapitalisierung der Zinsen zu p Procent den Wert k hat, so hat man (3)

$$k = c \,.\, 1{,}0p^n\left(1 + \frac{pt}{36\,000}\right), \quad c = \frac{k}{1{,}0p^n\left(1 + \frac{pt}{36\,000}\right)}$$

$$1{,}0p^n\left(1 + \frac{pt}{36\,000}\right) = \frac{k}{c}$$

Die Formeln für k und c sind zu logarithmischer Berechnung bequem. Zur Berechnung von n und t nimmt man die Logarithmen beider Seiten der dritten Gleichung und erhält

$$n \log 1{,}0p + \log\left(1 + \frac{pt}{36\,000}\right) = \log\frac{k}{c}$$

Hiernach erscheint n als ganze Zahl des Quotienten $\log\frac{k}{c} : \log 1{,}0p$ und $\log\left(1 + \frac{pt}{36\,000}\right)$ als Rest der Division. Ist der Rest $= \log 1{,}0s$, so findet man $1 + \frac{pt}{36\,000} = 1{,}0s$ und $t = \frac{360s}{p}$

Beispiel. Vor wieviel Jahren hatten 5326,4 Thlr. Kapital den Wert 5000 Thlr. bei jährlicher Kapitalisierung der Zinsen zu 6 Procent? Die Berechnung ist folgende:

$\log k$	3,7264
$\log c$	3,6990
	$(\log 1{,}0p)$
$\log\frac{k}{c}$	0,0274 : 0,0253 = 1
	253
$\log(1 + \ldots)$	0,0021
$1 + \ldots$	1,005
t	0,5 . 360 : 6 = 30

Die gesuchte Zeit beträgt 1 Jahr und 30 Tage.

Zur genauen Berechnung von p hat man nur in dem Falle $t = 0$

$$1{,}0p = \sqrt[n]{\frac{k}{c}}$$

Wenn t nicht verschwindet, so dient der ebenso berechnete Wert von $1{,}0p$ zur Grundlage einer Annäherung.

5. Wenn von dem Kapital c (Mise) nach jährlicher Kapitalisierung der Zinsen zu p Procent jährlich das Kapital r (Rente) weggenommen wird, so bleibt in der Kasse

nach 1 Jahr $c \cdot 1{,}0p - r$

$= 2 = c \cdot 1{,}0p^2 - r \cdot 1{,}0p - r$

$= 3 = c \cdot 1{,}0p^3 - r \cdot 1{,}0p^2 - r \cdot 1{,}0p - r$

. . . . . .

$= n = c \cdot 1{,}0p^n - r \cdot 1{,}0p^{n-1} - r \cdot 1{,}0p^{n-2} - \ldots - r \cdot 1{,}0p - r$

Die Subtrahenden bilden eine geometrische Progression, durch deren Summierung als Kassenbestand nach n Jahren erhalten wird

$$c \cdot 1{,}0p^n - r\,\frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p} = \frac{100r}{p}\left\{1 - \left(1 - \frac{cp}{100r}\right) \cdot 1{,}0p^n\right\}$$

$$\text{oder } \frac{100r}{p}\left\{\left(\frac{cp}{100r} - 1\right) \cdot 1{,}0p^n + 1\right\}$$

Wenn jährlich das Kapital r hinzugefügt wird, so ist das nach n Jahren angehäufte Kapital

$$\frac{100r}{p}\left\{\left(\frac{cp}{100r} + 1\right) \cdot 1{,}0p^n - 1\right\}$$

Beispiel. $c = 10\,000$ Gulden, $p = 5$, $r = 800$ Gulden, $n = 10$.

$\log \frac{100r}{p}$	4,2041	$\log 1{,}0p^n$	0,2119	
		$\log 1{,}0p^n$ (. .)	— 0,2141	(— A)
$\log c$	4,0000	$\log [1 - . .]$	— 0,4098	(— U)
$\log \frac{cp}{100r}$	— 0,2041 (— A)	$\log$ Form.	3,7943	
		Form.	6227	
$\log (1 - . .)$	— 0,4260 (— U)			

Anmerkung. Wenn bei jährlicher Kapitalisierung der Zinsen zu p Procent nach jedem $m$ten Teile eines Jahres die Rente ϱ gezahlt wird, so ist zur Berechnung des Kassenbestands nach n Jahren zu untersuchen, welche Rente am Schlusse eines Jahres statt der einzelnen während des Jahres fälligen Renten gezahlt werden kann. Statt 100 Einheiten hat man aber $\frac{t}{m}$ Jahr später $100 + \frac{pt}{m}$ Einheiten zu zahlen, für 1 Einheit den 100ten Teil, für ϱ Einheiten ϱmal soviel d. i. $\varrho\left(1 + \frac{pt}{100m}\right)$ Einheiten. Statt der einzelnen Renten während eines Jahres ist also am Schlusse des Jahres die Rente

$$\varrho\left(1 + \frac{p(m-1)}{100m}\right) + \varrho\left(1 + \frac{p(m-2)}{100m}\right) + \ldots + \varrho\left(1 + \frac{p}{100m}\right) + \varrho$$

zu zahlen. Nun ist die doppelte Summe

$$\begin{array}{ccccccc} (m-1) & + & (m-2) & + \ldots + & 2 & & + 1 \\ 1 & + & 2 & + \ldots + & (m-2) & + & (m-1) \end{array}$$

$= m(m-1)$, folglich

$$(m-1) + (m-2) + \ldots + 2 + 1 = \tfrac{1}{2}m(m-1)$$

also hat die gesuchte Rente den Wert $\varrho\left(m + \frac{m-1}{200}p\right)$. Nachdem man diesen Wert an die Stelle von r gesetzt hat, berechnet man den Kassenbestand wie oben.

6. Wenn man den gefundenen Kassenbestand $= 0$ setzt, so erhält man die Rentengleichung, welche die Aufgaben der Rentenrechnung löst: die Mise anzugeben, welche bei gegebener Verzinsung durch eine bestimmte Rente aufgezehrt wird; die Rente anzugeben, durch die bei gegebener Verzinsung in bestimmter Zeit eine gegebene Mise aufgezehrt wird; die Dauer einer Rente anzugeben, durch die bei gegebener Verzinsung eine bestimmte Mise aufgezehrt wird; die Verzinsung anzugeben, bei der eine bestimmte Mise durch eine gegebene Rente aufgezehrt wird.

I. und II. Wenn die Mise c durch die $n$jährige Rente r bei jährlicher Kapitalisierung der Zinsen zu p Procent aufgezehrt wird, so hat man (5) nach Division durch $1{,}0p^n$

$$c = \frac{100r}{p}(1 - 1{,}0p^{-n}) \qquad r = \frac{cp}{100(1 - 1{,}0p^{-n})}$$

Beispiel 1. $r = 800$; $p = 3{,}5$; $n = 20$.

$\log \frac{100r}{p}$	4,3590
$\log 1{,}0p^{-n}$	$-$ 0,2988 ($-A$)
$\log (1 - ..)$	$-$ 0,3033 ($-U$)
$\log c$	4,0557; $c = 1137_0$

Beispiel 2. $c = 20000$; $p = 3$; $n = 10$.

$\log \frac{pc}{100}$	2,7782
$\log 1{,}0p^{-n}$	$-$ 0,1284 ($-A$)
$\log \frac{1}{1 - ..}$	0,5918 (U)
$\log r$	3,3700; $r = 2344$

III. Wenn aus der Mise, der Verzinsung und der Rente die Dauer derselben zu berechnen ist, so setze man (5)

$$\left(1 - \frac{cp}{100r}\right) \cdot 1{,}0p^n = \frac{1}{\alpha} \qquad \alpha \cdot 1{,}0p^n = \frac{1}{1 - \frac{cp}{100r}}$$

weil n unter den gemachten Voraussetzungen nur eine ganze Zahl sein kann. Zur Bestimmung von n und α hat man

$$n \log 1{,}0p + \log \alpha = \log \frac{1}{1 - \frac{cp}{100r}}$$

Demnach ist n die ganze Zahl des Quotienten $\log \frac{1}{1 - ..} : \log 1{,}0p$ und $\log \alpha$ der Rest dieser Division. Nach $n$maliger Auszahlung der Rente r bleibt der Kassenbestand $\frac{100r}{p}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$.

Beispiel. $c = 20\,000$; $p = 3{,}5$; $r = 1200$.

$\log \frac{100r}{p}$	4,5351
$\log c$	4,3010
$\log \frac{cp}{100r}$	$-$ 0,2341 ($-A$)
$\log \frac{1}{1 - ..}$	0,3803 (U) : 0,01494 = 25 (log 1,0p)
	2988
	815
	747
$\log \alpha$	0,0068 (A)
$\log \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$	$-$ 1,81 ($-U$)
$\log \frac{100r}{p}$ (. .)	2,72 = log 53 o

Die Rente dauert 25 Jahre und läßt dann den Kassenbestand 53 o.

IV. Aus der Mise, der Rente und ihrer Dauer kann die Verzinsung im allgemeinen nicht berechnet werden. Denn die Rentengleichung (1)

$$\frac{100}{p}(1 - 1{,}0p^{-n}) = \frac{c}{r}$$

oder, nachdem man $\frac{1}{1{,}0p} = x$, $\frac{100}{p} = \frac{x}{1 - x}$ substituiert hat,

$$x\frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{c}{r}$$

ist vom $n$ten Grade, weil $1 - x^n$ durch $1 - x$ teilbar ist. Eine Gleichung dieser Art kann aber annäherungsweise aufgelöst werden, wenn bestimmte Werte von c, r, n gegeben sind (Algebra §. 8). In jedem besondern Falle wird dann p so begrenzt, daß

$$\log \frac{100r}{c} + \log \frac{1 - 1{,}0p^{-n}}{p} = 0$$

§. 23. Potenzen der Binomien mit positiven ganzen Exponenten.

1. Weil $(a+b)^m = \left\{a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right\}^m = a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$, so kommt es zunächst darauf an, die $m$te Potenz eines Binomium zu entwickeln, dessen erstes Glied 1 und dessen zweites Glied ein echter Bruch ist. Durch Multiplikation findet man

$$(1+x)^2 = (1+x)(1+x),\quad (1+x)^3 = (1+x)^2(1+x),\ ..$$

$$\begin{aligned}
(1+x)^2 &= 1+2x+x^2\\
(1+x)^3 &= 1+2x+x^2\\
&\quad\ +x+2x^2+x^3\\
&\overline{\quad 1+3x+3x^2+x^3}\\
(1+x)^4 &= 1+3x+3x^2+x^3\\
&\quad\ +x+3x^2+3x^3+x^4\\
&\overline{\quad 1+4x+6x^2+4x^3+x^4}
\end{aligned}$$

u. s. w., also eine nach steigenden Potenzen von x geordnete Reihe. Die Coefficienten (§. 4) der einzelnen Potenzen von x heißen Binomialcoefficienten, der 0te, 1te, 2te, .. bei der $m$ten Potenz des Binomium. Diese sind bei der 2ten, 3ten, 4ten Potenz

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 2 & & 1\\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1\\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}\quad \text{u. s. f.}$$

Aus der obigen Rechnung folgt, daß die Binomialcoefficienten bei der 5ten Potenz Summen von je zwei folgenden Binomialcoefficienten bei der 4ten Potenz sind, u. s. f.*). Um aber die Binomialcoefficienten bei einer Potenz unabhängig von den Binomialcoefficienten bei niederen Potenzen zu finden, muß man dieselben durch den Exponenten der Potenz ausdrücken. In der That ist bei der 4ten Potenz des Binomium

$$4 = 4,\quad 6 = 4\cdot\tfrac{3}{2},\quad 4 = 4\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{2}{3}$$

bei der 5ten Potenz

$$5 = 5,\quad 10 = 5\cdot\tfrac{4}{2},\quad 10 = 5\cdot\tfrac{4}{2}\cdot\tfrac{3}{3},\quad 5 = 5\cdot\tfrac{4}{2}\cdot\tfrac{3}{3}\cdot\tfrac{2}{4}$$

Danach ist zu prüfen, ob bei der $m$ten Potenz die Binomialcoefficienten

$$1,\ m,\ \frac{m(m-1)}{1\cdot 2},\ \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3},\ ..$$

sich ergeben, so daß man hätte:

*) Eine so konstruierte Tabelle der Binomialcoefficienten (triangulus arithmeticus bei Pascal) findet sich bereits bei Stifel arithm. 1544 fol. 44.

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

Die Bildung der Binomialcoefficienten aus dem Exponenten war durch die von Fermat und Pascal erfundenen Formeln der figurierten Zahlen vorbereitet. Vergl. Fermats Brief an Roberval 1636 Nov. 4 und Oeuvres de Pascal ed. Lahure 1858, II. p. 443. 452. 403. Die Binomialcoefficienten und das Binomialtheorem für positive ganze sowie für beliebige reale Exponenten hat Newton erfunden und in den Briefen an Oldenburg 1676 Juni 13 und Okt. 24 mitgeteilt. Die Bezeichnung $\binom{m}{k}$ kommt zuerst in nachgelassenen Abhandlungen Eulers vor. Acta Petrop. V, 1 p. 89 und V, 2 p. 76. Nov. Act. V p. 52.

2. Die Zahlen

$$1 \quad m \quad \frac{m(m-1)}{1.2} \quad \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \ldots$$

werden der Reihe nach durch

$$\binom{m}{0} \quad \binom{m}{1} \quad \binom{m}{2} \quad \binom{m}{3} \ldots$$

bezeichnet. Die Formel $\binom{m}{k}$, zu lesen m über k, bedeutet das Produkt von k Faktoren, die von m in natürlicher Reihe absteigen, dividiert durch das Produkt von k Faktoren, die von 1 aufsteigen,

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1.2\ldots k}$$

und ist eine ganze Zahl (§. 13, 13). Die Formel $\binom{m}{m}$ hat den Wert 1, während $\binom{m}{m+1}$, $\binom{m}{m+2}$, .. verschwinden, weil in ihren Zählern der Faktor 0 vorkommt.

Ein Produkt von Faktoren, deren je zwei folgende dieselbe Differenz haben, z. B. $a(a+b)(a+2b)(a+3b)$ u. s. w. (productum continuorum bei Pascal, functio inexplicabilis bei Euler Calc. diff. II c. 16 und 17. Vergl. Oettinger Crelle J. 33 p. 1) wird nach Kramp 1799 eine Fakultät genannt (auch Faktorielle nach Arbogast). Insbesondere wird das Produkt $1.2.3\ldots n$ nach Kramp (Arithm. universelle 1808 n° 289) durch $n!$ bezeichnet und n-Fakultät genannt.

Demnach hat $\binom{m}{k}$ den Zähler $\frac{m!}{(m-k)!}$ und man erhält

$$\binom{m}{k} = \frac{1.2\ldots m}{1.2\ldots k \,.\, 1.2\ldots(m-k)} = \frac{m!}{k!(m-1)!}$$

woraus unmittelbar folgt, daß

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$$

z. B. $\binom{12}{8} = \binom{12}{4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 495.$

3. Die Formel $\binom{m}{k}$ hat die Eigenschaft, daß

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} = \binom{m+1}{k}$$

Beweis. $\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)..(m-k+1)}{1 \cdot 2 .. k} = \binom{m}{k-1}\frac{m-k+1}{k}$

folglich ist

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} = \binom{m}{k-1}\left(\frac{m-k+1}{k} + 1\right) = \binom{m}{k-1}\frac{m+1}{k} = \binom{m+1}{k}$$

4. Die Formel $\binom{m}{k}$ ist der $k$te Binomialcoefficient bei der $m$ten Potenz eines Binomium, so daß

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + .. + \binom{m}{m}x^m$$

(Newtons Binomialtheorem, binomischer Lehrsatz.)

Beweis. Wenn für einen bestimmten Wert von m

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + ..$$

ist, so findet man

$$\begin{aligned}(1+x)^{m+1} &= 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + .. \\ &\quad + \quad x + \binom{m}{1}x^2 + \binom{m}{2}x^3 + .. \\ &= 1 + \binom{m+1}{1}x + \binom{m+1}{2}x^2 + \binom{m+1}{3}x^3 + ..\end{aligned}$$

weil $\binom{m}{1} + 1 = \binom{m+1}{1}$, $\binom{m}{2} + \binom{m}{1} = \binom{m+1}{2}$, .. (3). Nun ist aber

$$(1+x)^3 = 1 + \binom{3}{1}x + \binom{3}{2}x^2 + \binom{3}{3}x^3$$

wie sich durch Vergleichung dieser Formel mit der in (1) gefundenen ergiebt, also ist auch

$$(1+x)^4 = 1 + \binom{4}{1}x + \binom{4}{2}x^2 + \binom{4}{3}x^3 + \binom{4}{4}x^4$$

$$(1+x)^5 = 1 + \binom{5}{1}x + \binom{5}{2}x^2 + \binom{5}{3}x^3 + \binom{5}{4}x^4 + \binom{5}{5}x^5$$

. . . . . .

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + .. + \binom{m}{m}x^m$$

für jede positive ganze Zahl m*).

Anmerkung. Wenn man x mit $-x$ vertauscht, so bleiben x^2, x^4, .. unverändert, während x^3, x^5, .. in $-x^3$, $-x^5$, .. übergehen. Daher ist

$$(1-x)^m = 1 - \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 - \binom{m}{3}x^3 + ..$$

Wenn $x = \frac{b}{a}$, so ist (1)

$$(a+b)^m = a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}b + \binom{m}{2}a^{m-2}b^2 + .. + \binom{m}{1}ab^{m-1} + b^m$$

weil

$$a^m\frac{b}{a} = a^{m-1}b, \quad a^m\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{a^m b^2}{a^2} = a^{m-2}b^2, \text{ u. s. f.}$$

$$\binom{m}{m} = 1, \quad \binom{m}{m-1} = \binom{m}{1}, .. \quad (2)$$

5. Wenn x ein echter Bruch ist, so wird in der für $(1+x)^m$ gefundenen Reihe von einem bestimmten Gliede an jedes Glied kleiner als das ihm vorausgehende. Denn das Verhältnis des $(k+2)$ten Gliedes zum $(k+1)$ten ist

$$\binom{m}{k+1}x^{k+1} : \binom{m}{k}x^k = \frac{m-k}{k+1}x < 1$$

sobald k eine bestimmte Grenze überschreitet. Der Fehler, welchen man begeht, indem man von einem bestimmten Gliede an die folgenden Glieder vernachlässigt, läßt sich in jedem gegebenen Falle abschätzen. Setzt man z. B.

$$(1+x)^m = 1 + mx$$

so ist der Fehler

$$f = \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + .. + \binom{m}{m}x^m$$

$$= \binom{m}{2}x^2\left(1 + \frac{m-2}{3}x + \frac{m-2}{3}\,\frac{m-3}{4}x^2 + ..\right)$$

$$< \binom{m}{2}x^2\left\{1 + \frac{m-2}{3}x + \left(\frac{m-2}{3}x\right)^2 + ..\right\}$$

*) Die hier angewandte Methode der Induktion (ἐπαγωγή, Ableitung einer allgemeinen Regel aus einem besondern Falle) ist von Jac. Bernoulli (Acta Erud. 1686 p. 360) angegeben worden und heißt der Schluß von m auf $m+1$.

weil $\frac{m-2}{3}$, $\frac{m-3}{4}$, $\frac{m-4}{5}$, .. eine fallende Reihe bilden. Wenn nun $\frac{m-2}{3}x < 1$, so ist

$$1 + \frac{m-2}{3}x + \left(\frac{m-2}{3}x\right)^2 + .. < \frac{1}{1 - \frac{m-2}{3}x}$$

(§. 12, 5), folglich

$$f < \binom{m}{2} \frac{x^2}{1 - \frac{m-2}{3}x}$$

Setzt man ebenso

$$(1-x)^m = 1 - mx$$

so ist bei $\frac{m-2}{3}x < 1$ der Fehler positiv und $< \binom{m}{2}x^2$, weil dabei die Differenzen $\binom{m}{2}x^2 - \binom{m}{3}x^3$, $\binom{m}{3}x^3 - \binom{m}{4}x^4$, .. positiv sind.

Analog wird bei $\frac{m-2}{3}\frac{b}{a} < 1$

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b$$

gesetzt mit der Fehlergrenze

$$\binom{m}{2} \frac{a^{m-2}b^2}{1 - \frac{m-2}{3}\frac{b}{a}}$$

und $(a-b)^m = a^m - ma^{m-1}b$ mit der Fehlergrenze $\binom{m}{2}a^{m-2}b^2$.

6. Die $m$ten Wurzeln der Zahlen c, $c \cdot 2^m$, $c \cdot 3^m$, .. verhalten sich zu einander wie 1, 2, 3, ... Unter diesen Radikanden empfiehlt sich zur Berechnung seiner $m$ten Wurzel ein solcher, der von einer $m$ten Potenz sich nur wenig unterscheidet, z. B. $a^m \pm b$, wenn $b : a^m = h$ ein kleiner echter Bruch ist. Dann hat man

$$\sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{cn^m} = \sqrt[m]{a^m \pm b}$$

$$= a\sqrt[m]{1 \pm h} < a\left(1 \pm \frac{h}{m}\right) \text{ (§. 18, 6)}$$

Zu genauerer Bestimmung setze man $\sqrt[m]{1+h} = 1 + x$, folglich

$$(1+x)^m = 1 + h$$

$$mx + \binom{m}{2}x^2 = h - \binom{m}{3}x^3 - \ldots$$

Daher ist erstens

$$x = \frac{h - \binom{m}{3}x^3 - \ldots}{m + \binom{m}{2}x} > \frac{h - \binom{m}{3}\left(\frac{h}{m}\right)^3 - \ldots}{m + \binom{m}{2}\frac{h}{m}}$$

weil $x < h : m$, so daß

$$\sqrt[m]{a^m + b} = a + ax > a + \frac{ab - \frac{m-1}{2m}\frac{m-2}{3m}\frac{b^3}{a^{2m-1}} - \ldots}{ma^m + \frac{1}{2}(m-1)b}$$

Ebendaher ist zweitens

$$\frac{2x}{m-1} + x^2 = \frac{2h}{m(m-1)} - \frac{m-2}{3}x^3 - \ldots$$

$$x = -\frac{1}{m-1} + \sqrt{\frac{1}{(m-1)^2} + \frac{2h}{m(m-1)} - \frac{m-2}{3}x^3 - \ldots}$$

$$\sqrt[m]{a^m + b} = a + ax < \frac{m-2}{m-1}a + \sqrt{\left(\frac{a}{m-1}\right)^2 + \frac{2b}{m(m-1)a^{m-2}}}$$

Die rationale untere Grenze und mehr noch die irrationale obere Grenze bestimmen die Wurzel mit großer Genauigkeit. Wenn b, h, x negativ sind, so ist die rationale Formel eine obere, die irrationale eine untere Grenze der Wurzel*).

§. 24. Permutationen gegebener Elemente.

1. Unter **Elementen** werden hier Dinge (Individuen) verstanden, deren Qualität und Quantität dahin gestellt bleibt, und welche nur durch Ordnungszahlen (Nummern, Buchstaben) unterschieden sind. Von zwei Elementen heißt dasjenige das **höhere**, welches die größere Ordnungszahl hat.

Unter einer **Komplexion** gegebener Elemente wird ein Verein derselben nach irgend welcher Reihenfolge verstanden, wobei die Art der Verbindung dahin gestellt bleibt. **Permutationen** gegebener Elemente heißen alle die Komplexionen derselben, welche sich durch die Anordnung der Elemente unterscheiden.

2. Von n verschiedenen Elementen giebt es $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ Permutationen (§. 23, 2).

---

*) Lagny Méth. nouv. pour l'extraction .. Paris 1692. Halley Philos. Trans. 1694 p. 136. Lambert Beiträge II, 1 p. 152. Allgemeinere Untersuchungen über solche Annäherungen findet man bei Euler Nov. Comm. Petrop. 18. p. 136.

Beweis. Zu dem 1ten, 2ten, 3ten, .. Element kann jede Permutation der $n-1$ übrigen Elemente gesetzt werden, folglich giebt es von n verschiedenen Elementen $n$mal soviel Permutationen als von $n-1$ Elementen. Nun giebt es von 2 Elementen 1.2 Permutationen (ab und ba), also von 3 Elementen $1.2.3$ Permutationen, von 4 Elementen $1.2.3.4$ Permutationen, u. s. w.

3. Man findet die Permutationen von 3 Elementen, indem man zu dem Element 1 die Permutationen der Elemente 2, 3, dann zu 2 die Permutationen von 1, 3, dann zu 3 die Permutationen von 1, 2 setzt:

1 2 3	2 1 3	3 1 2
1 3 2	2 3 1	3 2 1

Man findet die Permutationen von 4 Elementen, indem man zu 1 die Permutationen von 2, 3, 4, zu 2 die Permutationen von 1, 3, 4, zu 3 die Permutationen von 1, 2, 4, und zu 4 die Permutationen von 1, 2, 3 setzt:

1 2 3 4	2 1 3 4	3 1 2 4	4 1 2 3
. . .	. . . .	. . .	. . .
1 4 3 2	2 4 3 1	3 4 2 1	4 3 2 1

Man findet die Permutationen von 5 Elementen, indem man zu 1 die Permutationen von 2, 3, 4, 5 setzt, zu 2 die Permutationen von 1, 3, 4, 5, u. s. f.

1 2 3 4 5	2 1 3 4 5	3 1 2 4 5
. . . .	. . . .	. . . .
1 5 4 3 2	2 5 4 3 1	3 5 4 2 1
4 1 2 3 5	5 1 2 3 4	
. . . .	. . . .	
4 5 3 2 1	5 4 3 2 1	

u. s. f. Überhaupt verliert bei dieser Methode ein Element seinen Platz erst dann, wenn die Ordnungszahlen der folgenden Elemente eine fallende Reihe bilden. Das Element weicht dem nächst höhern aus der Reihe der folgenden Elemente, und die übrigen Elemente werden so hinzugefügt, daß ihre Ordnungszahlen eine steigende Reihe bilden.

4. Aus einer Komplexion können nach und nach alle Permutationen durch Vertauschung von jedesmal 2 Elementen abgeleitet werden*).

Bei 3 Elementen ergiebt sich folgende Reihenfolge der Permutatio-

*) Gallenkamp Elem. d. Mathem. 1850 §. 110.

nen, wenn man nach und nach 3 mit 2, 2 mit 1, 1 mit 3, 3 mit 2, 2 mit 1 vertauscht:

1 2 3 2 3 1 3 1 2
1 3 2 2 1 3 3 2 | 1

Indem man zu 1 die Permutationen von 2, 3, 4 setzt, dann 1 mit 2 vertauscht und die folgenden Elemente versetzt, dann 2 mit 3, 3 mit 4 vertauscht und jedesmal die folgenden Elemente versetzt, findet man für 4 Elemente:

1 2 3 4 2 4 3 1 3 1 2 4 4 3 2 1
. . . .
1 4 3 2 2 1 3 4 3 4 2 1 4 | 1 2 3

Für 5 Elemente:

1 2 3 4 5 2 5 1 3 4 3 4 5 1 2 4 2 3 5 1 5 1 2 3 4
. . . .
1 5 2 3 4 2 4 5 1 3 3 2 4 5 1 4 1 2 3 5 5 4 | 1 2 3

Für 6 Elemente:

1 2 3 4 5 6 2 6 5 1 3 4 3 4 2 6 5 1
. . . .
1 6 5 2 3 4 2 4 3 6 5 1 3 1 5 4 2 6
4 1 5 3 2 6 5 6 2 1 4 3 6 3 4 5 2 1
. . . .
4 6 2 1 5 3 5 3 4 6 2 1 6 | 1 2 3 4 5

u. s. f. für mehr Elemente.

5. Die erste Permutation enthält die gegebenen Elemente in steigender Ordnung, die folgenden Permutationen zeigen Abweichungen von dieser Ordnung. Man zählt bei jeder Permutation von jedem Element an die Anzahl der niedern Elemente, welche ihm folgen: die Summe dieser Anzahlen heißt die Anzahl der Inversionen (dérangements, variations), welche in der Permutation enthalten sind. Z. B. die Komplexion 2431 enthält 4 Inversionen: 21, 43, 41, 31.

Die Anzahl der in einer Komplexion vorhandenen Inversionen wird durch die Vertauschung von zwei Elementen um eine ungerade Zahl verändert.

Wenn ein Element mit dem Nachbar vertauscht wird, so bleibt die Stellung der bewegten Elemente gegen die übrigen Elemente unverändert, und die Anzahl der vorhandenen Inversionen ändert sich um 1. Um die durch k Elemente getrennten Elemente G und H zu vertauschen, kann man zuerst G mit dem Nachbar zur Rechten $(k + 1)$mal, dann

H mit dem Nachbar zur Linken $k$mal vertauschen, wobei die Anzahl der vorhandenen Inversionen $(2k + 1)$mal d. i. ungeradmal um 1 sich ändert. Durch eine ungerade Menge Änderungen um 1 wird aus einer geraden Zahl eine ungerade, aus einer ungeraden Zahl eine gerade, also ist in beiden Fällen die Differenz der Anzahlen der Inversionen eine ungerade Zahl.

6. Wenn man die Permutationen verschiedener Elemente durch Vertauschung von jedesmal zwei Elementen entwickelt (4), so sind die in den aufeinander folgenden Permutationen vorhandenen Inversionen abwechselnd von gerader und von ungerader Anzahl (5). Da die Anzahl aller Permutationen gerade ist, so giebt es ebensoviel Permutationen der einen Klasse (gerade, positive, mit gerader Anzahl von Inversionen), als Permutationen der andern Klasse (ungerade, negative, mit ungerader Anzahl von Inversionen).

ABCD und *CDAB* sind Permutationen derselben Klasse, weil aus der ersten die zweite durch 2 Vertauschungen (*A* mit *C*, *B* mit *D*) entsteht; 31245 und 14325 sind Permutationen nicht derselben Klasse, weil aus der ersten die zweite durch 3 Vertauschungen (3 mit 1, 4 mit 2 und 3) entsteht.

§. 25. Variationen und Kombinationen gegebener Elemente.

(Bois §. 88 ff.)

1. Variationen $k$ten Grades von gegebenen Elementen heißen die Komplexionen von je k aus der Reihe der gegebenen Elemente. Die Variationen $n$ten Grades von n Elementen sind von den Permutationen derselben nicht verschieden. Variationen $(n + 1)$ten Grades von n Elementen können nicht gebildet werden.

Die Komplexionen, welche je k der gegebenen Elemente enthalten, von denen aber nicht zwei aus denselben k Elementen gebildet sind, heißen die Kombinationen $k$ten Grades der gegebenen Elemente. Die Kombinationen 1ten, 2ten, 3ten, .. Grades werden auch Unionen, Binionen (Amben), Ternionen (Ternen), .. genannt.

2. Von n verschiedenen Elementen giebt es

$n(n-1)\,..\,(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ Variationen $k$ten Grades

$\frac{n(n-1)\,..\,(n-k+1)}{1\,.\,2\,..\,k} = \binom{n}{k}$ Kombinationen $k$ten Grades.

Beweis. Um aus den Variationen $k$ten Grades die Variationen $(k+1)$ten Grades zu bilden, setze man zu jeder Variation jedes Element, das sie noch nicht enthält. Man erhält also $(n-k)$mal soviel Variationen $(k+1)$ten Grades als $k$ten Grades. Nun giebt es n Variationen 1ten Grades, folglich $n(n-1)$ Variationen 2ten Grades, $n(n-1)(n-2)$ Variationen 3ten Grades, u. s. f.

Die Variationen $k$ten Grades lassen sich in Gruppen so verteilen, daß die Variationen jeder Gruppe Permutationen derselben k Elemente sind. Da zu jeder Gruppe $1 \cdot 2 \ldots k$ Variationen gehören (§. 24, 2), so giebt es den $(1 \cdot 2 \ldots k)$ten Teil soviel Gruppen als Variationen $k$ten Grades. Jeder Gruppe entspricht eine Kombination $k$ten Grades.

Die in §. 23, 2 gebrauchte Formel

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

ist als Anzahl von Kombinationen eine ganze Zahl. Von n verschiedenen Elementen giebt es ebensoviel Kombinationen $k$ten als $(n-k)$ten Grades.

3. Man findet die Variationen 2ten Grades, indem man zu jedem Element der Reihe nach jedes andere setzt; 3ten Grades, indem man zu jedem Element die Variationen 2ten Grades der übrigen Elemente setzt; 4ten Grades, indem man zu jedem Element die Variationen 3ten Grades der übrigen Elemente setzt, u. s. w.

Für 5 Elemente:

1 2	2 1	3 1	4 1	5 1
1 3	2 3	3 2	4 2	5 2
1 4	2 4	3 4	4 3	5 3
1 5	2 5	3 5	4 5	5 4

1 2 3	2 1 3	3 1 2	4 1 2	5 1 2
1 2 4	2 1 4	3 1 4	4 1 3	5 1 3
. .	. .	. .	. .	. .
1 5 4	2 5 4	3 5 4	4 5 3	5 4 3 u. s. f.

Man findet die Kombinationen 2ten Grades, indem man zu jedem Element der Reihe nach jedes höhere setzt; 3ten Grades, indem man zu jedem Element die Kombinationen 2ten Grades aus den höhern Elementen setzt; 4ten Grades, indem man zu jedem Element die Kombinationen 3ten Grades aus den höhern Elementen setzt, u. s. w.

Für 6 Elemente:

1 2	2 3	3 4	4 5	5 6
1 3	2 4	3 5	4 6	
1 4	2 5	3 6		
1 5	2 6			
1 6				

1 2 3	1 3 4	1 4 5	1 5 6	2 3 4	2 4 5	2 5 6
1 2 4	1 3 5	1 4 6		2 3 5	2 4 6	
1 2 5	1 3 6			2 3 6		
1 2 6						

3 4 5	3 5 6	4 5 6
3 4 6		
1 2 3 4	2 3 4 5	3 4 5 6
. . .	. . .	
1 4 5 6	2 4 5 6	

Überhaupt behält bei der Aufstellung von Kombinationen jedes Element seinen Platz so lange, bis daß die folgenden Elemente durch höhere nicht mehr ersetzt werden können. Dann weicht das Element dem nächsthöhern Element, und die nächsthöhern Elemente folgen.

4. Wenn n verschiedene Elemente in Gruppen A, B, C, . . von α, β, γ, . . Elementen auf alle mögliche Arten verteilt werden sollen, wobei $\alpha + \beta + \gamma + .. = n$ vorausgesetzt wird: so wählt man zuerst aus allen Elementen α für die Gruppe A, was auf $\binom{n}{\alpha}$ verschiedene Arten geschehen kann (2); dann wählt man aus den jedesmal übrigen Elementen β für die Gruppe B, was auf $\binom{n-\alpha}{\beta}$ verschiedene Arten geschehen kann, u. s. w. Die letzte Gruppe kann jedesmal nur auf eine Art gebildet werden. Also giebt es

$\binom{n}{\alpha}$ verschiedene Gruppen A

$\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta}$ verschiedene Gruppen AB

$\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta}\binom{n-\alpha-\beta}{\gamma}$ verschiedene Gruppen ABC, u. s. w.

Wenn $\delta = n - \alpha - \beta - \gamma$ ist, so kann die letzte Gruppe D jedesmal nur auf eine Art gebildet werden, weil $\binom{n-\alpha-\beta-\gamma}{\delta} = 1$,

und es giebt

$$\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta}\binom{n-\alpha-\beta}{\gamma} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!}$$

verſchiedene Gruppen *ABCD*.

Wenn man in allen Gruppierungen die Elemente der einzelnen Gruppen permutiert, ſo erhält man alle Permutationen der gegebenen Elemente, weil jede Permutation mit α beſtimmten Elementen beginnt, denen β beſtimmte Elemente folgen, u. ſ. w. In der That erhält man $n!$, indem man die Anzahl der Gruppierungen mit $\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!$ multipliciert.

Wenn unter den gegebenen n Elementen α einander gleich ſind, wenn unter den übrigen β einander gleich ſind, wenn unter den übrigen γ einander gleich ſind, wenn die übrigen δ von einander verſchieden ſind, ſo beſetze man mit dieſen Elementen je α, β, γ, δ Plätze. Aus jeder Gruppierung der Plätze entſtehn $\delta!$ Permutationen. Alſo giebt es

$$\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}$$ Permutationen dieſer Elemente*).

5. Die Kombinationen $k$ten Grades von n Elementen enthalten entweder das $n$te Element nicht, oder ſie enthalten dasſelbe. Die erſte Gruppe umfaßt die Kombinationen $k$ten Grades der erſten $n-1$ Elemente, die zweite Gruppe umfaßt die Kombinationen $(k-1)$ten Grades dieſer Elemente, denen das $n$te Element zugeſetzt wird. Alſo iſt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

wie §. 23, 3 arithmetiſch bewieſen worden iſt.

Die Kombinationen $k$ten Grades von n Elementen endigen entweder mit dem $k$ten Element, oder mit dem $(k+1)$ten Element, oder mit dem $(k+2)$ten Element, u. ſ. w. Nun endigen mit dem $(k+m)$ten Element ſoviel Kombinationen $k$ten Grades, als es Kombinationen $(k-1)$ten Grades der erſten $k+m-1$ Elemente giebt. Alſo iſt

$$\binom{n}{k} = \binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \binom{k+1}{k-1} + \ldots + \binom{n-1}{k-1}$$

Durch fortgeſetzte Zerlegungen dieſer Art beſtätigt man, daß $\binom{n}{k}$ eine Summe von ganzen Zahlen, folglich eine ganze Zahl iſt.

Die Kombinationen $k$ten Grades von $u+v$ Elementen enthalten entweder k Elemente des Syſtems von u Elementen, oder $k-1$ Ele-

*) Frénicle Abrégé des combin. 1676 (Anc. Mém. de Paris t. V) Wallis Combin. 1685 c. 2.

mente dieſes Syſtems und 1 Element des Syſtems von v Elementen, oder $k-2$ Elemente des erſten Syſtems und 2 Elemente des zweiten Syſtems, u. ſ. w. Nun können $k-m$ Elemente des erſten Syſtems mit m Elementen des zweiten Syſtems auf $\binom{u}{k-m}\binom{v}{m}$ verſchiedene Arten kombiniert werden. Alſo iſt*)

$$\binom{u+v}{k}=\binom{u}{k}+\binom{u}{k-1}\binom{v}{1}+\binom{u}{k-2}\binom{v}{2}+\cdots+\binom{u}{1}\binom{v}{k-1}+\binom{v}{k}$$

6. Wenn jedes der n Elemente beliebig oft geſetzt werden kann, ſo giebt es von denſelben

n^k Variationen $k$ten Grades

$\binom{n+k-1}{k}=\binom{k+n-1}{n-1}$ Kombinationen $k$ten Grades

Beweis. Um aus den Variationen $k$ten Grades die Variationen $(k+1)$ten Grades zu bilden, ſetze man zu jeder Variation jedes Element. Man erhält alſo $n$mal ſoviel Variationen $(k+1)$ten Grades als $k$ten Grades. Nun giebt es n Variationen 1ten Grades, folglich giebt es n^2 Variationen 2ten Grades, n^3 Variationen 3ten Grades, u. ſ. w.

Kombinationen 2ten Grades von der geforderten Art giebt es mit 1 anfangende n, mit 2 anfangende $n-1$, u. ſ. w., zuſammen (5)

$$\binom{n}{1}+\binom{n-1}{1}+\cdots+\binom{1}{1}=\binom{n+1}{2}$$

Kombinationen 3ten Grades giebt es demnach mit 1 anfangende $\binom{n+1}{2}$, mit 2 anfangende $\binom{n}{2}$, u. ſ. w., zuſammen

$$\binom{n+1}{2}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{2}{2}=\binom{n+2}{3}$$

Geſetzt es giebt $\binom{n+i-1}{i}$ Kombinationen $i$ten Grades, ſo giebt es Kombinationen $(i+1)$ten Grades mit 1 anfangende $\binom{n+i-1}{i}$, mit 2 anfangende $\binom{n+i-2}{i}$, u. ſ. w., zuſammen

$$\binom{n+i-1}{i}+\binom{n+i-2}{i}+\cdots+\binom{i}{i}=\binom{n+i}{i+1}$$

*) Euler. Vergl. die Anmerkungen zu §. 23, 1 und §. 32, 2.

Nun giebt es $\binom{n+2}{3}$ Kombinationen 3ten Grades, also giebt es $\binom{n+3}{4}$ Kombinationen 4ten Grades, u. s. w.

Demnach giebt es ebensoviel Kombinationen $k$ten Grades von n Elementen, deren jedes $k$mal vorhanden ist, als von $n+k-1$ Elementen, deren jedes 1mal vorhanden ist (2). In der That findet man aus jenen Kombinationen diese, wenn man in jeder Kombination die Elemente der Reihe nach um 0, 1, 2, .., $k-1$ erhöht.

Anmerkung. Die Anfänge der Kombinatorik finden sich im 16ten Jahrhundert bei Buckley, Cardano u. a. Die erste größere Abhandlung über Kombinationen hat Pascal um 1650 verfaßt, in der er mit Fermat zusammentreffend den Zusammenhang der Kombinationszahlen mit den figurierten Zahlen erläuterte (Oeuvres éd. Lahure II. p. 423 ff.). Leibniz' Abhandlung de arte combinatoria 1666 enthält nicht sowohl theoretisch Neues als vielmehr Anwendungen der Lehre von den Permutationen und Kombinationen. Der heutige Bestand der Kombinatorik findet sich vollständig in Jacob Bernoullis ars conjectandi (op. posth. 1713). In diesem Buche kommt der Name Permutationen vor, wofür Wallis Alternationen, Leibniz Variationen gebraucht hatte. Der Name Komplexionen bedeutet bei Leibniz Kombinationen; der Name Variationen hat seine kombinatorische Bedeutung gegen das Ende des 18ten Jahrhunderts erhalten.

§. 26. Determinante eines Systems von Zahlen.

1. I. Wenn ein Quadrat von Elementen gegeben ist d. h. n^2 Elemente (Zahlen), je n in n Reihen geordnet, von denen das $k$te der $i$ten Zeile (das $i$te der $k$ten Kolonne) durch a_{ik} bezeichnet wird, z. B.

$$\begin{array}{c} a_{11}\ a_{12}\ .\ .\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ .\ .\ a_{2n} \\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ . \\ a_{n1}\ a_{n2}\ .\ .\ a_{nn} \end{array}$$

so versteht man unter der Determinante*) dieses Systems ein bestimmtes Aggregat aller Produkte von je n Elementen, deren nicht zwei einer Zeile oder einer Kolonne angehören. Wenn $rst\ ..$ eine Permutation der Kolonnen-Nummern 123 .. ist, und wenn ε den Wert 1 oder -1 hat, je nachdem $rst\ ..$ zu den geraden oder zu den ungeraden Permutationen der 123 .. gehört (§. 24, 6), so ist das Produkt der n Elemente

$$\varepsilon a_{1r}\ a_{2s}\ a_{3t}\ ..$$

ein Glied der Determinante R. Insbesondere ist das aus der Diagonale $a_{11}\ ..\ a_{nn}$ gebildete Produkt das Anfangsglied der Deter-

*) Die Geschichte und die weitere Entwickelung dieser Formen findet man in der Schrift des Verf. über Determinanten.

minante. Indem man für $rst\,..$ alle Permutationen der Kolonnen-Nummern setzt, und bei jeder Permutation ε bestimmt, findet man alle Glieder der Determinante, die Summe

$$R = \Sigma\, \varepsilon a_{1r}\, a_{2s}\, a_{3t}\,..$$

II. Aus dem Glied $\varepsilon a_{1r}\, a_{2s}\, a_{3t}\,..$ von R erhält man durch Vertauschung der Kolonnen r und s und durch Veränderung des Zeichens

$$-\varepsilon a_{1s}\, a_{2r}\, a_{3t}\,..$$

ein andres Glied von R. Dasselbe Glied

$$-\varepsilon a_{2r}\, a_{1s}\, a_{3t}\,..$$

entspringt aber auch aus $\varepsilon a_{1r}\, a_{2s}\, a_{3t}\,..$ durch Vertauschung der Zeilen 1 und 2 und durch Veränderung des Zeichens. Daher können alle Glieder von R auch dadurch gebildet werden, daß man bei festen Kolonnen-Nummern $rst\,..$ für die Zeilen-Nummern $123\,..$ alle ihre Permutationen setzt, und bei den ungeraden Permutationen das Zeichen $-$ zusetzt. Wenn nämlich $fgh\,..$ eine Permutation der Zeilen-Nummern, und ε' den Wert 1 oder -1 hat, je nachdem $fgh\,..$ zu den geraden oder zu den ungeraden Permutationen der $123\,..$ gehört, so ist

$$\varepsilon\varepsilon' a_{fr}\, a_{gs}\, a_{ht}\,..$$

ein Glied von R. Wenn nun $fgh\,..$ und $rst\,..$ Permutationen derselben Klasse von $123\,..$ sind, so ist $\varepsilon\varepsilon' = 1$; wenn nicht, so ist $\varepsilon\varepsilon' = -1$.

Daher ist $\varepsilon a_{fr}\, a_{gs}\, a_{ht}\,..$ der allgemeine Ausdruck eines Gliedes von R unter den Bedingungen, daß $fgh\,..$ und $rst\,..$ beide Permutationen von $123\,..$ sind, und daß ε den Wert 1 oder -1 hat, je nachdem $fgh\,..$ und $rst\,..$ Permutationen derselben Klasse sind oder nicht. Dabei ist

$$f+g+h+\,..\;=\;1+2+3+\,..\;=\;r+s+t+\,..$$
$$f-r+g-s+h-t+\,..\;=\;0$$

III. Die Determinante des Systems von n^2 Elementen hat $n!$ Glieder, ebensoviel negative als positive. Sie heißt $n$ten Grades, weil ihre Glieder Produkte von n Faktoren sind, und wird durch Einschluß des Systems zwischen Linien oder durch das mit dem Doppelzeichen $\pm$ unter ein Summierungszeichen gesetzte Anfangsglied bezeichnet:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{11}\, a_{22}\, ..\, a_{nn}$$

Die Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

von Systemen, in denen die Zeilen des einen mit den Kolonnen des andern übereinstimmen, sind von einander nicht verschieden, weil sie dasselbe Anfangsglied haben, und weil jedes Glied der einen in der andern mit demselben Zeichen vorkommt.

Beispiele. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{11}\, a_{22} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$

$$\begin{vmatrix} a & c \\ c & b \end{vmatrix} = ab - c^2$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1$$

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc - af^2 - bg^2 - ch^2 + 2fgh$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & h & g \\ b & h & 0 & f \\ c & g & f & 0 \end{vmatrix} = a^2f^2 + b^2g^2 + c^2h^2 - 2abfg - 2acfh - 2bcgh$$

2. Wenn im System der Elemente zwei parallele Reihen vertauscht werden, so wechselt die Determinante das Zeichen. Wenn im System der Elemente zwei parallele Reihen einander gleich sind, so hat die Determinante den Wert 0.

Beweis. Ist R die Determinante des gegebenen Systems, R' die Determinante des Systems, das aus dem gegebenen System durch Vertauschung von zwei parallelen Reihen abgeleitet worden, also

$$R = \Sigma \varepsilon a_{fr}\, a_{gs}\, a_{ht} \dots, \quad R' = \Sigma \varepsilon' a_{gr}\, a_{fs}\, a_{ht} \dots$$

wo ε' den Wert 1 oder -1 hat, je nachdem $gfh \dots$ und $rst \dots$ Permutationen derselben Klasse sind oder nicht. Nun sind $gfh \dots$ und $fgh \dots$ Permutationen nicht derselben Klasse, folglich ist $\varepsilon' = -\varepsilon$, $R' = -R$.

Wenn die vertauschten Reihen einander gleich sind, so ist R' von R nicht verschieden, also $R = -R$ d. h. $R = 0$ bei beliebigen Elementen.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & a & a_2 \\ b & b_1 & b & b_2 \\ c & c_1 & c & c_2 \\ d & d_1 & d & d_2 \end{vmatrix} = 0$$

3. Wenn man von dem System der n^2 Elemente m Zeilen auswählt und von diesen ebensoviel Kolonnen, so erhält man ein partiales System von m^2 Elementen, dessen Determinante eine **Subdeterminante** m**ten Grades** für das gegebene System heißt. Es giebt deren $\binom{n}{m}$ für die Zeilen-Kombination, also $\binom{n}{m}^2$ für das gegebene System, und ebensoviel Subdeterminanten $(n-m)$ten Grades (§. 25, 2). Demnach kommen bei dem gegebenen System in Betracht außer der Determinante $n$ten Grades

n^2 Subdeterminanten $(n-1)$ten Grades

$\binom{n}{2}^2$ Subdeterminanten $(n-2)$ten Grades

u. s. w. Subdeterminanten ersten Grades sind die einzelnen Elemente.

Die Kombinationen von je m unter den Nummern 1 bis n, deren es $\mu = \binom{n}{m}$ giebt, werden beliebig numeriert, und die zu der $i$ten Kombination der Zeilen und der $k$ten Kombination ihrer Kolonnen gehörende Subdeterminante wird durch p_{ik} bezeichnet. So bildet man

$$\begin{matrix} p_{11} & \cdot & \cdot & p_{1\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{\mu 1} & \cdot & \cdot & p_{\mu\mu} \end{matrix}$$

das **System der Subdeterminanten** m**ten Grades**, welche zu dem gegebenen System von Elementen gehören.

4. Zwei Subdeterminanten, deren Grade sich zu n ergänzen,

$$\Sigma \pm a_{\alpha\mathfrak{f}}\, a_{\beta\mathfrak{g}} \ldots \text{ und } \varepsilon\Sigma \pm a_{\varrho\mathfrak{t}}\, a_{\sigma\mathfrak{u}} \ldots$$

heißen **adjungiert**, eine die **Adjunkte** der andern, wenn das Produkt der Elemente

$$\varepsilon a_{\alpha\mathfrak{f}}\, a_{\beta\mathfrak{g}} \ldots a_{\varrho\mathfrak{t}}\, a_{\sigma\mathfrak{u}} \ldots$$

ein Glied der Determinante $\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$ ist (1). Adjungiert sind z. B.

$$\Sigma \pm a_{22} \ldots a_{nn} \text{ und } a_{11}$$

$$\Sigma \pm a_{33} \ldots a_{nn} \text{ und } \Sigma \pm a_{11}\, a_{22}$$

Bei $n = 5$ sind adjungiert

$$a_{34} \text{ und } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{15} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{25} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{45} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{55} & a_{53} \end{vmatrix}$$

weil $3\,|\,1245$ und $4\,|\,1253$ Permutationen derselben Klasse sind;

$$\begin{vmatrix} a_{15} & a_{12} \\ a_{35} & a_{32} \end{vmatrix} \text{ und } \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix}$$

weil $13\,|\,245$ und $52\,|\,134$ zu derselben Klasse gehören.

Wenn p_{ik} und q_{ik} adjungierte Subdeterminanten sind, so sind die Systeme (3)

$$\begin{matrix} p_{11} \ldots p_{1\mu} \\ \ldots\ldots \\ p_{\mu 1} \ldots p_{\mu\mu} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} q_{11} \ldots q_{1\mu} \\ \ldots\ldots \\ q_{\mu 1} \ldots q_{\mu\mu} \end{matrix}$$

adjungierte Systeme von Subdeterminanten der gegebenen Systeme. Insbesondere sind die Systeme

$$\begin{matrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_{1n} \\ \ldots\ldots \\ \alpha_{n1} \ldots \alpha_{nn} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{matrix}$$

adjungiert, wenn durch α_{ik} die Adjunkte des Elements a_{ik} d. h. die ihm adjungierte Subdeterminante $(n-1)$ten Grades bezeichnet wird.

5. Das Produkt der Adjunkten

$$p_{ik}\, q_{ik} = \Sigma \pm a_{\alpha\varphi}\, a_{\beta\chi} \ldots \varepsilon \Sigma \pm a_{\varrho\tau}\, a_{\sigma u} \ldots$$

hat $m!\,(n-m)!$ Glieder, welche Glieder der Determinante $n$ten Grades R sind. Denn das Anfangsglied des Produkts

$$\varepsilon a_{\alpha\varphi}\, a_{\beta\chi} \ldots a_{\varrho\tau}\, a_{\sigma u} \ldots$$

ist ein Glied von R (4). Nach Vertauschung von zwei ersten Nummern α, β sind $\beta\alpha \ldots \varrho\sigma \ldots$ und $\chi\varphi \ldots \tau u \ldots$ Permutationen nicht derselben Klasse, also ist $-a_{\beta\varphi}\, a_{\alpha\chi} \ldots$ ein Glied von p_{ik} und das Glied des Produkts

$$-\varepsilon a_{\beta\varphi}\, a_{\alpha} \ldots a_{\varrho\tau}\, a_{\sigma u} \ldots$$

ein Glied von R, u. s. w.

Die Glieder von R, welche die Elemente $a_{\alpha\varphi}, a_{\beta\chi}, \ldots$ enthalten,

sind in der Formel $a_{\alpha\varepsilon}\, a_{\beta\varrho}\, .\, .\, \varepsilon\Sigma \pm a_{\varepsilon\iota}\, a_{\sigma\upsilon}\, .\, .$ vereinigt. Die Glieder der Determinante $\Sigma \pm a_{11}\, .\, .\, a_{55}$, welche das Element a_{23} enthalten, sind in $a_{23}\, \Sigma \pm a_{12}\, a_{31}\, a_{44}\, a_{55}$ vereinigt; die Glieder, welche a_{31}, a_{14} enthalten, werden durch $a_{31}\, a_{14}\, \Sigma \pm a_{22}\, a_{43}\, a_{55}$ ausgedrückt.

6. Wenn dem System

$$\begin{matrix} a_{11} & .\, . & a_{1n} \\ . & . \;.\; . & . \\ a_{n1} & .\, . & a_{nn} \end{matrix}$$

dessen Determinante den Wert R hat, das System

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & .\, . & \alpha_{1n} \\ . & . \;.\; . & . \\ \alpha_{n1} & .\, . & \alpha_{nn} \end{matrix}$$

adjungiert ist (4), so hat die aus zwei Zeilen (Kolonnen) der beiden Systeme z. B. aus der $i$ten Zeile (Kolonne) des einen und der $k$ten Zeile (Kolonne) des andern Systems durch successive Multiplikation der Elemente und Addition der Produkte komponierte Formel

$$a_{i1}\, \alpha_{k1} + a_{i2}\, \alpha_{k2} + .\, . + a_{in}\, \alpha_{kn}$$
$$a_{1i}\, \alpha_{1k} + a_{2i}\, \alpha_{2k} + .\, . + a_{ni}\, \alpha_{nk}$$

den Wert R oder 0, je nachdem i und k gleich sind oder ungleich.

Beweis. Die Glieder der Determinante enthalten von der $i$ten Zeile (Kolonne) entweder das 1te Element, oder das 2te, oder das 3te, u. s. w. (1). Nun sind die Glieder der Determinante, welche das Element a_{ik} enthalten, in dem Produkt $a_{ik}\, \alpha_{ik}$ vereinigt (5). Also umfaßt die Summe

$$a_{i1}\, \alpha_{i1} + a_{i2}\, \alpha_{i2} + .\, . \text{ oder } a_{1i}\, \alpha_{1i} + a_{2i}\, \alpha_{2i} + .\, .$$

alle Glieder der Determinante R, jedes einfach. Daher ist

$$a_{k1}\, \alpha_{i1} + a_{k2}\, \alpha_{i2} + .\, . \text{ oder } a_{1k}\, \alpha_{1i} + a_{2k}\, \alpha_{2i} + .\, .$$

die Determinante des Systems, welches aus dem gegebenen System dadurch erhalten wird, daß man die $i$te Zeile (Kolonne) durch die $k$te ersetzt. Die Zeilen (Kolonnen) dieses Systems sind nicht alle von einander verschieden, also ist die Determinante dieses Systems null (2).

Beispiel. Wenn $\begin{matrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{matrix}$ und $\begin{matrix} \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta & \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma & \gamma_1 & \gamma_2 \end{matrix}$ adjungiert sind, d. h.

$$\alpha = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \quad \alpha_1 = -\begin{vmatrix} b_2 & b \\ c_2 & c \end{vmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{vmatrix} b & b_1 \\ c & c_1 \end{vmatrix}$$

$$\beta = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \quad \beta_1 = -\begin{vmatrix} c_2 & c \\ a_2 & a \end{vmatrix} \quad \beta_2 = \begin{vmatrix} c & c_1 \\ a & a_1 \end{vmatrix}$$

$$\gamma = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad \gamma_1 = -\begin{vmatrix} a_2 & a \\ b_2 & b \end{vmatrix} \quad \gamma_2 = \begin{vmatrix} a & a_1 \\ b & b_1 \end{vmatrix}$$

wenn die Determinante des gegebenen Systems R ist, so ist

$$\begin{array}{ll} a\alpha + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = R & a\,\alpha + b\,\beta + c\,\gamma = R \text{ u. s. w.} \\ b\alpha + b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 = 0 & a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma = 0 \\ c\alpha + c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = 0 & a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma = 0 \end{array}$$

7. Wenn alle Elemente einer Reihe des gegebenen Systems null sind, so ist die Determinante null. Wenn nur ein Element einer Reihe nicht null ist, so fallen die Glieder der Determinante weg, welche jenes Element nicht enthalten.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdot \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdot \\ a_{32} & a_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdot \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdot \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \cdot \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdot \\ a_{43} & a_{44} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

Wenn alle Elemente einerseits der Diagonale null sind, so bleibt nur das Anfangsglied der Determinante übrig.

Umgekehrt kann ein System ohne Veränderung seiner Determinante mit einem Rand besetzt werden, der auf der verlängerten Diagonale 1, einerseits Nullen, andrerseits beliebige Elemente enthält.

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & a & a' \\ y & b & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t & u \\ 0 & a & a' \\ 0 & b & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' & v \\ b & b' & w \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

8. Wenn man alle Elemente einer Reihe des Systems mit einer Zahl multipliciert, so wird die Determinante des Systems mit derselben Zahl multipliciert. Dabei geht (6)

$a_{1k}\,\alpha_{1k} + a_{2k}\,\alpha_{2k} + \ldots$ über in $pa_{1k}\,\alpha_{1k} + pa_{2k}\,\alpha_{2k} + \ldots$

also R in pR. Z. B.

$$\begin{vmatrix} pa_1 & a_2 & a_3 \\ pb_1 & b_2 & b_3 \\ pc_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa_1 & pa_2 & pa_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = p \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & a' \\ -b & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & a \\ b' & b \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & pa & a' \\ b & pb & b' \\ c & pc & c' \end{vmatrix} = p \begin{vmatrix} a & a & a' \\ b & b & b' \\ c & c & c' \end{vmatrix} = 0$$

Wenn die Elemente einer Reihe zu einander sich verhalten, wie die Elemente einer parallelen Reihe, so ist die Determinante null (2).

9. Wenn die Elemente einer Reihe polynomisch sind, so ist die Determinante des Systems die Summe mehrerer Determinanten.

$$\begin{vmatrix} p_1 + q_1 + r_1 & a_{12} \cdot \\ p_2 + q_2 + r_2 & a_{22} \cdot \\ \cdots & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & a_{12} \cdot \\ p_2 & a_{22} \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_1 & a_{12} \cdot \\ q_2 & a_{22} \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r_1 & a_{12} \cdot \\ r_2 & a_{22} \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Denn unter der Voraussetzung $a_{ik} = p_i + q_i + r_i$ hat man

$$R = a_{1k} a_{1k} + a_{2k} a_{2k} + \cdots$$
$$= p_1 a_{1k} + p_2 a_{2k} + \cdots + q_1 a_{1k} + q_2 a_{2k} + \cdots + r_1 a_{1k} + r_2 a_{2k} + \cdots$$

Wenn man zu den Elementen einer Kolonne (Zeile) die Elemente einer andern mit einer beliebigen Zahl multiplicierten Kolonne (Zeile) der Reihe nach addiert, so bleibt die Determinante unverändert.

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + pa_1 & a_1 & a_2 \\ b + pb_1 & b_1 & b_2 \\ c + pc_1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} \text{ weil } \begin{vmatrix} pa_1 & a_1 & a_2 \\ pb_1 & b_1 & b_2 \\ pc_1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

Daher ist

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} a_1 x + b_1 y + c_1 z & b_1 & c_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z & b_2 & c_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 - x & x_2 - x \\ y_1 - y & y_2 - y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & x_1 - x & x_2 - x \\ y & y_1 - y & y_2 - y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

10. Der Satz (6) gilt in gleicher Weise für die adjungierten Systeme (4)

$$\begin{matrix} p_{11} \cdots p_{1\mu} \\ \cdots \\ p_{\mu 1} \cdots p_{\mu\mu} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} q_{11} \cdots q_{1\mu} \\ \cdots \\ q_{\mu 1} \cdots q_{\mu\mu} \end{matrix}$$

Die aus zwei Zeilen (Kolonnen) der beiden Systeme komponierte Formel

$$p_{i1} q_{k1} + p_{i2} q_{k2} + \cdots + p_{i\mu} q_{k\mu}$$
$$p_{1i} q_{1k} + p_{2i} q_{2k} + \cdots + p_{\mu i} q_{\mu k}$$

hat den Wert R oder 0, je nachdem i und k gleich sind oder ungleich.

Beweis. Die Glieder der Determinante R enthalten von der $i$ten Zeilen-Kombination die Elemente entweder der 1ten Kolonnen-Kombination, oder der 2ten, oder der 3ten, u. s. w. Nun sind die Glieder von R, welche die Subdeterminante p_{ih} enthalten, in dem

Produkt $p_{ih}\,q_{ih}$ vereinigt (5). Also umfaßt die Summe

$$p_{i1}\,q_{i1} + p_{i2}\,q_{i2} + \ldots \text{ oder } p_{1i}\,q_{1i} + p_{2i}\,q_{2i} + \ldots$$

alle Glieder der Determinante, jedes einfach. Daher ist $p_{k1}\,q_{i1} + p_{k2}\,q_{i2} + \ldots$ die Determinante des Systems, welches aus dem gegebenen System dadurch erhalten wird, daß man die *i*te Zeilen-Kombination durch die *k*te ersetzt. Die Zeilen dieses Systems sind nicht alle voneinander verschieden, also ist die Determinante desselben null. Z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = 12\,|\,34 + 23\,|\,14 + 31\,|\,24 + 34\,|\,12 + 14\,|\,23 + 24\,|\,31$$

$$\text{wenn } 12\,|\,34 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_3 & c_4 \\ d_3 & d_4 \end{vmatrix} \text{ u. s. w.}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 \ldots a_5 \\ \ldots \\ e_1 \ldots e_5 \end{vmatrix} = 12\,|\,345 + 23\,|\,145 + 34\,|\,125 + 45\,|\,123 + 13\,|\,425 + 24\,|\,315 + 35\,|\,142 + 14\,|\,235 + 25\,|\,134 + 15\,|\,243$$

$$\text{wenn } 12\,|\,345 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_3 & c_4 & c_5 \\ d_3 & d_4 & d_5 \\ e_3 & e_4 & e_5 \end{vmatrix} \text{ u. s. w.}$$

11. Wenn die Determinante des gegebenen Systems null ist, so verhalten sich die Adjunkten einer Zeile (Kolonne) zu einander der Reihe nach wie die Adjunkten einer andern Zeile (Kolonne).

Beweis. Die Determinanten der Systeme

$$\begin{matrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}$$

werden durch $(abcd)$, (abc) bezeichnet, in dem ersten System hat das Element a die Adjunkte α, u. s. w. Dann ist

$$(acd)\alpha + (bcd)\beta = (a\alpha + b\beta,\ c\ d) \text{ nach (9)}$$
$$= (a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta,\ c\ d)$$

Nun ist $a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta = (abcd)$, $a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma + d_1\delta = 0$, u. s. w. (6), folglich (7)

$$(acd)\alpha + (bcd)\beta = (abcd) \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

und ebenso

$$(acd)\alpha_1 + (bcd)\beta_1 = (abcd) \begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c & d \end{vmatrix}$$

Unter der Voraussetzung $(abcd) = 0$ und (acd) nicht null ist demnach

$$\alpha : \beta = \alpha_1 : \beta_1 \qquad \alpha : \alpha_1 = \beta : \beta_1 \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} = 0$$

so daß für das System der Adjunkten alle Determinanten zweiten und höhern Grades null sind.

12. Aus den gegebenen (rektangulären oder quadratischen) Systemen

$$\begin{matrix} a_{11} \cdot\cdot a_{1n} \\ a_{21} \cdot\cdot a_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \end{matrix} \qquad \begin{matrix} b_{11} \cdot\cdot b_{1n} \\ b_{21} \cdot\cdot b_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \end{matrix}$$

werde das System von m^2 polynomischen Elementen

$$\begin{matrix} c_{11} \cdot\cdot c_{1m} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c_{m1} \cdot\cdot c_{mm} \end{matrix}$$

komponiert, und zwar c_{ik} aus der $i$ten Zeile des ersten Systems und aus der $k$ten Zeile des zweiten durch successive Multiplikation der Elemente und Addition der Produkte, also:

$$c_{ik} = a_{i1} b_{k1} + \cdot\cdot + a_{in} b_{kn} = \sum_t a_{it} b_{kt} \qquad (t = 1, 2, \cdot\cdot, n)$$

I. Die Determinante des komponierten Systems hat das Anfangsglied

$$c_{11} c_{22} c_{33} \cdot\cdot = \sum_t a_{1t} b_{1t} \sum_u a_{2u} b_{2u} \sum_v a_{3v} b_{3v} \cdot\cdot$$
$$= \sum_{tuv\cdot\cdot} (a_{1t} a_{2u} a_{3v} \cdot\cdot b_{1t} b_{2u} b_{3v} \cdot\cdot)$$

eine Summe, deren Glieder entstehn, während t, u, v, .. die Nummern 1 bis n durchlaufen.

Aus dem Anfangsglied entstehn die übrigen Glieder der Determinante, wenn die zweiten Nummern der c permutiert werden (1). Diesen Permutationen entsprechen dieselben Permutationen der ersten Nummern der b, und man findet bei unveränderten t, u, v, .. alle Glieder der Determinante $\Sigma \pm b_{1t} b_{2u} b_{3v} \cdot\cdot$ mit dem gemeinschaftlichen Faktor $a_{1t} a_{2u} a_{3v} \cdot\cdot\cdot$ Also ist

$$\Sigma \pm c_{11} c_{22} c_{33} \cdot\cdot = \sum_{tuv\cdot\cdot} (a_{1t} a_{2u} a_{3v} \cdot\cdot \Sigma \pm b_{1t} b_{2u} b_{3v} \cdot\cdot)$$

Wenn t, u, v, .. nicht alle verschieden sind, so ist $\Sigma \pm b_{1t} b_{2u} b_{3v} \cdot\cdot = 0$. Daher erhält man alle Glieder der Summe, indem man für $tuv\cdot\cdot$ je m verschiedene Nummern der Reihe 1 bis n setzt.

II. Wenn $m < n$ und wenn man anstatt einer bestimmten Kombination $tuv\cdot\cdot$ deren Permutationen setzt, so hat $\Sigma \pm b_{1t} b_{2u} b_{3v} \cdot\cdot$ den Wert Q oder den Wert $-Q$ (2). Daher liefern die entsprechen-

den Glieder der zu bildenden Summe alle Glieder der Determinante $\Sigma \pm a_{1t} a_{2u} a_{3v} \ldots$ mit dem gemeinschaftlichen Faktor Q. Folglich ist

$$\Sigma \pm c_{11} c_{22} c_{33} \ldots = \sum_{tuv\ldots} (\Sigma \pm a_{1t} a_{2u} a_{3v} \ldots \Sigma \pm b_{1t} b_{2u} b_{3v} \ldots)$$

eine Summe, deren Glieder dadurch gebildet werden, daß man für $tuv\ldots$ alle Kombinationen von m verschiedenen Nummern der Reihe 1 bis n setzt. Die Determinante des komponierten Systems ist demnach die Summe von $\binom{n}{m}$ Produkten entsprechender Determinanten $m$ten Grades der beiden gegebenen Systeme.

III. Wenn $m = n$, so kann man für $tuv\ldots$ nur $123\ldots$ setzen und findet

$$\Sigma \pm c_{11} \ldots c_{nn} = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn} \; \Sigma \pm b_{11} \ldots b_{nn}$$

Die Determinante des komponierten Systems ist das Produkt der Determinanten der beiden gegebenen Systeme.

IV. Wenn $m > n$, so sind alle Glieder der Summe

$$\sum_{tuv\ldots} (a_{1t} a_{2u} a_{3v} \ldots \Sigma \pm b_{1t} b_{2u} b_{3v} \ldots)$$

null, also ist die Determinante des komponierten Systems null.

Beispiel. Die Determinante des aus den Systemen

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{matrix}$$

komponierten Systems

$$\begin{matrix} a_1 f_1 + b_1 g_1 + c_1 h_1 & a_1 f_2 + b_1 g_2 + c_1 h_2 \\ a_2 f_1 + b_2 g_1 + c_2 h_1 & a_2 f_2 + b_2 g_2 + c_2 h_2 \end{matrix}$$

wird bezeichnet durch

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix}$$

und aufgelöst in die Summe der Produkte

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & h_1 \\ f_2 & h_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g_1 & h_1 \\ g_2 & h_2 \end{vmatrix}.$$

Die Determinante des aus den Systemen

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{matrix}$$

komponierten Systems

$$\begin{matrix} a_1 f_1 + b_1 g_1 + c_1 h_1 & a_1 f_2 + b_1 g_2 + c_1 h_2 & a_1 f_3 + b_1 g_3 + c_1 h_3 \\ a_2 f_1 + b_2 g_1 + c_2 h_1 & a_2 f_2 + b_2 g_2 + c_2 h_2 & a_2 f_3 + b_2 g_3 + c_2 h_3 \\ a_3 f_1 + b_3 g_1 + c_3 h_1 & a_3 f_2 + b_3 g_2 + c_3 h_2 & a_3 f_3 + b_3 g_3 + c_3 h_3 \end{matrix}$$

ist das Produkt

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix}$$

Die Determinante des aus den Systemen

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_4 & g_4 & h_4 \end{matrix}$$

komponierten Systems

$$\begin{matrix} a_1 f_1 + b_1 g_1 + c_1 h_1 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & a_1 f_4 + b_1 g_4 + c_1 h_4 \\ \cdot\cdot \quad \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \quad \cdot\cdot \\ a_4 f_1 + b_4 g_1 + c_4 h_1 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & a_4 f_4 + b_4 g_4 + c_4 h_4 \end{matrix}$$

wird ebenfalls bezeichnet durch

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_4 & g_4 & h_4 \end{vmatrix}$$

Sie ist null und in der That nicht verschieden von

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_4 & g_4 & h_4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

13. Wenn dem System $a_{11} \ldots a_{nn}$, welches die Determinante R hat, das System $\alpha_{11} \ldots \alpha_{nn}$ adjungiert ist (4), so verhalten sich die Subdeterminanten desselben Grades des Systems α zu einander, wie die Adjunkten der entsprechenden Subdeterminanten des Systems a.

Beweis. Der Subdeterminante $m$ten Grades $\Sigma \pm \alpha_{fl} \alpha_{gk} \ldots$ sei die Subdeterminante $(n - m)$ten Grades $\Sigma \pm \alpha_{ru} \alpha_{sv} \ldots$ adjungiert, welcher die Subdeterminante $\Sigma \pm a_{ru} a_{sv} \ldots$ des Systems a entspricht. Aus den Systemen von je n^2 Elementen

$$\begin{matrix} \alpha_{fl} \alpha_{fk} \ldots \alpha_{fu} \alpha_{fv} \ldots & & a_{fl} a_{fk} \ldots a_{fu} a_{fv} \ldots \\ \alpha_{gl} \alpha_{gk} \ldots \alpha_{gu} \alpha_{gv} \ldots & & a_{gl} a_{gk} \ldots a_{gu} a_{gv} \ldots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 \quad 0 \ldots 1 \quad 0 \ldots & & a_{rl} a_{rk} \ldots a_{ru} a_{rv} \ldots \\ 0 \quad 0 \ldots 0 \quad 1 \ldots & & a_{sl} a_{sk} \ldots a_{su} a_{sv} \ldots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{matrix}$$

werde das System von n^2 Elementen $c_{11} \ldots c_{nn}$ komponiert (12). Dann hat in den m ersten Kolonnen c_{ik} den Wert R oder 0, je nachdem i

und k gleich sind oder ungleich (6). Die folgenden Kolonnen sind von den entsprechenden Kolonnen des zweiten Systems nicht verschieden. Das Produkt der Determinanten der beiden Systeme ist die Determinante des komponierten Systems (12, III). Das erste System hat nach Streichung der Ränder mit der Spitze 1 die Determinante $\Sigma \pm a_{fi} a_{gk} \ldots$ (7). Das zweite System hat die Determinante R (5). Das komponierte System hat nach Streichung der Ränder mit der Spitze R die Determinante $R^m \Sigma \pm a_{ru} a_{sv} \ldots$ (7). Also ist

$$R \Sigma \pm a_{fi} a_{gk} \ldots = R^m \Sigma \pm a_{ru} a_{sv} \ldots$$

$$\begin{vmatrix} \operatorname{adj} a_{fi} & \operatorname{adj} a_{fk} & \cdot \\ \operatorname{adj} a_{gi} & \operatorname{adj} a_{gk} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix} : \operatorname{adj} \begin{vmatrix} a_{fi} & a_{fk} & \cdot \\ a_{gi} & a_{gk} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = R^{m-1}$$

Insbesondere ist $\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn} = R^{n-1}$. Wenn $\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{55} = R$, so ist $\Sigma \pm a_{21} a_{43} a_{54} : \Sigma \pm a_{15} a_{32} = R^2$, u. s. w.

Derselbe Satz gilt auf Grund von (10) für die Subdeterminanten desselben Grades der adjungierten Systeme $p_{11} \ldots p_{\mu\mu}$ und $q_{11} \ldots q_{\mu\mu}$.

§. 27. Produkte und Potenzen von Polynomien.

(Bois §. 92.)

1. Das Produkt $(a_1 + x)(a_2 + x) \ldots (a_n + x)$ giebt entwickelt eine Summe von 2^n Gliedern. Das Anfangsglied ist das Produkt aller ersten Glieder der Binomien $a_1 a_2 \ldots a_n$; das Schlußglied ist das Produkt aller zweiten Glieder x^n. Die Glieder des Produkts, welche den Faktor x^k gemein haben, entstehen durch Multiplikation von je $n - k$ ersten Gliedern der Binomien und den zweiten Gliedern der übrigen Binomien. Der Coefficient von x^k ist demnach die Summe der Produkte von je $n - k$ verschiedenen Größen aus der Reihe $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Um diesen Coefficienten zu berechnen, bildet man die Kombinationen $(n - k)$ten Grades der Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Z. B.

$$(a+x)(b+x)(c+x)(d+x) = abcd + (abc + abd + acd + bcd)x + (ab + ac + ad + bc + bd + cd)x^2 + (a + b + c + d)x^3 + x^4$$

Wenn insbesondere alle Glieder $a_1, a_2, \ldots, a_n$ einander gleich sind und den Wert a haben, so ist der Coefficient von x^k die Summe von $\binom{n}{n-k}$ Gliedern, deren jedes den Wert a^{n-k} hat. Da aber $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ ist, so erhält man

$$(a + x)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} x + \binom{n}{2} a^{n-2} x^2 + \ldots$$

wie §. 23 aus andern Gründen entwickelt worden ist.

2. Die Potenz $(a + b + c + \ldots)^n$ giebt entwickelt eine Summe von Gliedern, die je n Faktoren aus der Reihe $a, b, c, \ldots$ enthalten und aus der allgemeinen Formel

$$\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots} a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$$

dadurch hervorgehen, daß $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ auf alle mögliche Arten gleiche oder ungleiche Werte von 0 bis n erhalten, deren Summe jedesmal n beträgt*).

Beweis. Aus der Reihe der n Polynomien $a + b + c + \ldots$ wähle man α, um aus ihren ersten Gliedern a^α zu bilden. Aus den übrigen $n - \alpha$ Polynomien wähle man β, um aus ihren zweiten Gliedern b^β zu bilden. Aus den übrigen $n - \alpha - \beta$ Polynomien wähle man γ, um aus ihren dritten Gliedern c^γ zu bilden, u. s. f. Wenn man das Produkt $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ auf alle mögliche Arten gebildet hat, so hat man alle Glieder der gesuchten Potenz.

Man kann aber a^α auf $\binom{n}{\alpha}$ verschiedene Arten bilden, weil es soviel Kombinationen αten Grades der n Polynomien giebt. Man kann dann ebenso b^β auf $\binom{n-\alpha}{\beta}$ verschiedene Arten, dann c^γ auf $\binom{n-\alpha-\beta}{\gamma}$ verschiedene Arten, u. s. w. bilden. Man kann folglich $a^\alpha b^\beta$ auf $\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta}$ verschiedene Arten, $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ auf $\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta}\binom{n-\alpha-\beta}{\gamma}$ verschiedene Arten, u. s. w. bilden. Daher erhält das Glied $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ den Coefficienten

$$\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta}\binom{n-\alpha-\beta}{\gamma}\ldots = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots}$$

d. i. die Anzahl der Permutationen von n Elementen, deren α den Wert a, β den Wert b, γ den Wert c, . . haben (§. 25, 4).

Beispiel. Wenn $n = 4$, so sind folgende Kombinationen der Exponenten möglich:

4 3 1 2 1 1 1 1 1 1
2 2

*) Leibniz an Joh. Bernoulli 1695 Mai $\frac{1}{16}$. Vergl. Klügel math. W. 3 p. 832.

Man bilde nun die Kombinationen 1ten bis 4ten Grades der Elemente $a, b, c, \ldots$ und nehme die Elemente
in jeder Kombination 1ten Grades mit dem Exponenten 4
in jeder Kombination 2ten Grades der Reihe nach mit den Exponenten
3, 1 1, 3 2, 2
in jeder Kombination 3ten Grades mit den Exponenten
2, 1, 1 1, 2, 1 1, 1, 2
in jeder Kombination 4ten Grades mit dem Exponenten 1.

Die Glieder $a^4, \ldots$ erhalten den Coefficienten $\frac{1.2.3.4}{1.2.3.4} = 1$

Die Glieder $a^3b, ab^3, \ldots$ erhalten den Coefficienten $\frac{1.2.3.4}{1.2.3} = 4$

Die Glieder $a^2b^2, \ldots$ erhalten den Coefficienten $\frac{1.2.3.4}{1.2.1.2} = 6$

Die Glieder $a^2bc, ab^2c, \ldots$ erhalten den Coefficienten $\frac{1.2.3.4}{1.2} = 12$

Die Glieder $abcd, \ldots$ erhalten den Coefficienten $1.2.3.4 = 24$

Werden die Summen dieser Glieder der Reihe nach durch
$$\Sigma a^4, \quad \Sigma a^3 b, \quad \Sigma a^2 b^2, \quad \Sigma a^2 bc, \quad \Sigma abcd$$
und das Polynomium $a + b + c + \ldots$ durch P bezeichnet, so ist
$$P^4 = \Sigma a^4 + 4\Sigma a^3 b + 6\Sigma a^2 b^2 + 12\Sigma a^2 bc + 24\Sigma abcd$$
Analog hat man
$$P^2 = \Sigma a^2 + 2\Sigma ab$$
$$P^3 = \Sigma a^3 + 3\Sigma a^2 b + 6\Sigma abc, \text{ u. s. w.}$$

Um bei der Potenzierung mit 6 z. B. $\Sigma a^3 b^2 c$ darzustellen, bildet man die Kombinationen 3ten Grades der Elemente $a, b, c, \ldots$ und giebt den Elementen der einzelnen Komplexionen der Reihe nach die Exponenten
3, 2, 1 3, 1, 2 2, 3, 1 u. s. f.

3. Um die Potenz $(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)^n$ in eine Summe von Gliedern nach der Reihe der darin vorkommenden Potenzen von x geordnet zu entwickeln, bildet man die Kombinationen $n$ten Grades der Elemente $a_0, a_1, a_2, \ldots$, deren jedes $n$mal gesetzt werden kann, so daß die Summen der Indices in den einzelnen Kombinationen der Reihe nach die Werte 0, 1, 2, .. haben. Wenn eine Kombination aus α Elementen a_0, β Elementen a_1, γ Elementen a_2, .. besteht und die Summe der n Indices $\alpha . 0 + \beta . 1 + \gamma . 2 + \ldots = k$, so ist (2)
$$\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\ldots}\, a_0^{\alpha} (a_1 x)^{\beta} (a_2 x^2)^{\gamma} \ldots$$

ein Glied der gesuchten Reihe, welches x^k enthält, weil

$$a_0^{\alpha}\,(a_1 x)^{\beta}\,(a_2 x^2)^{\gamma}\,\ldots = a_0^{\alpha}\,a_1^{\beta}\,a_2^{\gamma}\,\ldots\,x^{\beta+2\gamma+\ldots}$$

Man findet alle Glieder, in denen x^k vorkommt, wenn man die Zahl k aus n ungleichen oder gleichen Indices der Glieder des Polynomium 0, 1, 2, .. auf alle verschiedenen Arten zusammensetzt*). Z. B. für $n = 5$ kann man die Exponenten von x auf folgende Arten zusammensetzen:

0 aus	0	0	0	0	0		6 aus	0	0	0	0	6
1 aus	0	0	0	0	1			0	0	0	1	5
2 aus	0	0	0	0	2			0	0	0	2	4
	0	0	0	1	1			0	0	0	3	3
3 aus	0	0	0	0	3			0	0	1	1	4
	0	0	0	1	2			0	0	1	2	3
	0	0	1	1	1			0	0	2	2	2
4 aus	0	0	0	0	4			0	1	1	1	3
	0	0	0	1	3			0	1	1	2	2
	0	0	0	2	2			1	1	1	1	2
	0	0	1	1	2		7 aus	0	0	0	0	7
	0	1	1	1	1			u. s. w.				
5 aus	0	0	0	0	5							
	0	0	0	1	4							
	0	0	0	2	3							
	0	0	1	1	3							
	0	0	1	2	2							
	0	1	1	1	2							
	1	1	1	1	1							

Ist r, s, t, u, v eine dieser Komplexionen, so hat das Glied

$$a_r\,a_s\,a_t\,a_u\,a_v\,x^{r+s+t+u+v}$$

den Coefficienten 1, wenn 5 gleiche Indices vorhanden sind,
" " 5, " 4 " " " "
" " 20, " 3 " " " "
" " 60, " 2 " " " "
" " 30, " 2 u. 2 " " " "
" " 10, " 2 u. 3 " " " "
" " 120, wenn alle Indices verschieden sind.

*) Moivre Philos. Trans. 1697 p. 619. Eine rekurrente Entwickelung findet man bei Euler Introd. I. §. 76. Über die Anzahlen der möglichen Gliederungen einer gegebenen Zahl aus kleinern Zahlen hat Euler Introd. I. c. 16 weitere Untersuchungen angestellt.

Die gesuchte Potenz ist demnach:

$$a_0^5 + 5a_0^4 a_1 x + 5a_0^4 a_2 \mid x^2 + 5a_0^4 a_3 \mid x^3$$
$$10a_0^3 a_1^2 \mid 20a_0^3 a_1 a_2 \mid$$
$$10a_0^2 a_1^3 \mid$$

$$+ 5a_0^4 a_4 \mid x^4 + 5a_0^4 a_5 \mid x^5 + 5a_0^4 a_6 \mid x^6 + \ldots$$
$$20a_0^3 a_1 a_3 \mid 20a_0^3 a_1 a_4 \mid 20a_0^3 a_1 a_5$$
$$10a_0^3 a_2^2 \mid 20a_0^3 a_2 a_3 \mid 20a_0^3 a_2 a_4$$
$$30a_0^2 a_1^2 a_2 \mid 30a_0^2 a_1^2 a_3 \mid 10a_0^3 a_3^2$$
$$5a_0 a_1^4 \mid 30a_0^2 a_1 a_2^2 \mid 30a_0^2 a_1^2 a_4$$
$$20a_0 a_1^3 a_2 \mid 60a_0^2 a_1 a_2 a_3$$
$$a_1^5 \mid 10a_0^2 a_2^3$$
$$20a_0 a_1^3 a_3$$
$$30a_0 a_1^2 a_2^2$$
$$5a_1^4 a_2$$

4. Wenn man in der Reihe der Größen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jede Größe von allen folgenden subtrahiert, so erhält man $\binom{n}{2}$ Differenzen, deren Produkt sich auf eine Determinante reduciert, nämlich*).

$$(a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \ldots (a_n - a_1) \mid 1\ a_1\ a_1^2 \ldots a_1^{n-1} \mid$$
$$(a_3 - a_2) \ldots (a_n - a_2) = \mid 1\ a_2\ a_2^2 \ldots a_2^{n-1} \mid$$
$$\ldots\ldots, \mid \ldots\ldots \mid$$
$$(a_n - a_{n-1}) \mid 1\ a_n\ a_n^2 \ldots a_n^{n-1} \mid$$

Beweis. Sind i, k beliebige Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$, und zwar $i < k$; ist P das gesuchte Produkt, Q das Produkt der Differenzen, welche die Größen a_i und a_k nicht enthalten, R das Produkt der Differenzen, welche die Größe a_i, aber nicht a_k enthalten, S das Produkt der Differenzen, welche die Größe a_k, aber nicht a_i enthalten, so ist $P = QRS(a_k - a_i)$. Wenn nun a_i mit a_k vertauscht wird, so bleibt Q unverändert; RS bleibt unverändert, weil das Produkt jedes Paares $(a_h - a_i)(a_h - a_k)$ oder $(a_i - a_h)(a_h - a_k)$ oder $(a_i - a_h)(a_k - a_h)$ unverändert bleibt; $a_k - a_i$ aber erhält den entgegengesetzten Wert; demnach erhält P den entgegengesetzten Wert.

In P kommt zunächst als Produkt aller Minuenden das Glied $a_1^0 a_2^1 a_3^2 \ldots a_n^{n-1}$ vor. Ferner kommt jedes Glied, welches aus $a_1^0 a_2^1 a_3^2 \ldots a_n^{n-1}$ durch Vertauschung der Indices sich bilden läßt, als Produkt aller Minuenden in einem Produkt vor, das den Wert P oder $-P$ hat, je nachdem die Permutation der Indices zu den

*) Cauchys Lehrsatz. Vergl. des Verf. Determ. §. 10.

geraden oder ungeraden Permutationen gehört. Daher umfaßt P alle Glieder, welche aus $a_1{}^0 a_2{}^1 a_3{}^2 \ldots a_n{}^{n-1}$ durch Vertauschung der Indices abgeleitet werden können, und zwar positiv oder negativ, je nachdem die Permutationen der Indices gerade oder ungerade sind; mithin enthält P alle Glieder der obigen Determinante (§. 26, 1).

Kein Glied von P enthält eine der Größen $a_1, a_2, \ldots$ in höherer als $(n-1)$ter Potenz, weil jede der Größen in $n-1$ Differenzen vorkommt. Die Glieder von P, worin irgend zwei der Größen gleiche Exponenten haben, sind paarweise entgegengesetzt gleich. Wenn z. B. $a_h{}^\alpha a_i{}^\beta a_k{}^\gamma \ldots$ ein Glied von P bedeutet, so ist $a_i{}^\alpha a_h{}^\beta a_k{}^\gamma \ldots$ ein Glied von $-P$, und $-a_i{}^\alpha a_h{}^\beta a_k{}^\gamma \ldots$ ein Glied von P. Die Glieder $a_h{}^\alpha a_i{}^\beta a_k{}^\gamma \ldots$ und $-a_i{}^\alpha a_h{}^\beta a_k{}^\gamma \ldots$ sind entgegengesetzt gleich, wenn $\alpha = \beta$. Daher bleiben in P nur die Glieder der obigen Determinante übrig.

Von allen $2^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ Gliedern des Produkts bleiben demnach nur die $1 \cdot 2 \ldots n$ Glieder der Determinante übrig, also $1 \cdot 2 \cdot 3$ statt 2^3, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ statt 2^6, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ statt 2^{10}, u. s. f.

In dem einfachsten Falle ist

$$(b-a)(c-a)(c-b) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= ab^2 - a^2 b + bc^2 - b^2 c + ca^2 - c^2 a$$

folglich auch

$$1 = \frac{ab}{(c-a)(c-b)} + \frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca}{(b-a)(b-c)}$$

§. 28. Figurierte Zahlen und arithmetische Progressionen.

(Beis §§. 93. 81. 82.)

1. Die Formel $\binom{m+n-1}{m}$, welche als Binomialcoefficient, so wie als Anzahl von Kombinationen oder Permutationen in Betracht gezogen worden ist (§. 23 und 25), heißt auch die $n$te figurierte

Zahl *m*ter Ordnung*). Die Reihe der figurierten Zahlen *m*ter Ordnung ist demnach

$$\binom{m}{m}\ \binom{m+1}{m}\ \binom{m+2}{m}\ ..\ \binom{m+n-1}{m}\ ..$$

Die erste figurierte Zahl jeder Ordnung ist 1. Die figurierten Zahlen erster Ordnung sind die natürlichen Zahlen. Die *n*te figurierte Zahl *m*ter Ordnung erscheint als Summe der $(n-1)$ten figurierten Zahl der *m*ten Ordnung und der *n*ten figurierten Zahl der $(m-1)$ten Ordnung, oder als Summe der ersten *n* figurierten Zahlen $(m-1)$ter Ordnung, weil (§. 25, 5)

$$\binom{m+n-1}{m} = \binom{m+n-2}{m} + \binom{m+n-2}{m-1}$$
$$= \binom{m-1}{m-1} + \binom{m}{m-1} + \binom{m+1}{m-1} + \ldots + \binom{m+n-2}{m-1}$$

Die Summen der ersten 1, 2, 3, .. natürlichen Zahlen sind die figurierten Zahlen zweiter Ordnung; die Summen der ersten 1, 2, 3, .. figurierten Zahlen zweiter Ordnung sind die figurierten Zahlen dritter Ordnung, u. s. w., weil

$$1 + 2 + 3 + .. + n = \binom{n+1}{2}$$
$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + .. + \binom{n+1}{2} = \binom{n+2}{3}$$
$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + .. + \binom{n+2}{3} = \binom{n+3}{4}$$

u. s. w. Demnach sind die figurierten Zahlen der ersten Ordnungen folgende:

1	2	3	4	5	6	7 ..
1	3	6	10	15	21	28 ..
1	4	10	20	35	56	84 ..
1	5	15	35	70	126	210 ..

*) Die Bildung der figurierten Zahlen (Polygonalzahlen u. s. w.) durch fortschreitende Summierung wird der Pythagoreischen Schule zugeschrieben. Die ältesten Abhandlungen über dieselben sind von Nicomachus Arithm. II und Diophantus verfaßt, über welche Nesselmann Gesch. d. Algebra p. 201 und 462 Bericht erstattet. Mit Aufsuchung allgemeiner Formeln der figurierten Zahlen haben im 16ten und 17ten Jahrh. sich beschäftigt Maurolycus Arithm. I (1575), Benz Manuductio ad numerum geometricum Ulm 1621, Faulhaber u. a. Vergl. Kästner Gesch. d. Math. 3 p. 120. Die Darstellung einer figurierten Zahl durch die Quotienten von Produkten folgender Zahlen ist von Fermat (Brief an Roberval 1636 Nov. 4) entdeckt worden, bald darauf auch von Pascal (Traité des ordres numériques. Oeuvres éd. Lahure II p. 440).

Anmerkung. I. Die figurierten Zahlen zweiter Ordnung werden Trigonalzahlen, die figurierten Zahlen dritter Ordnung Tetraedralzahlen (dreiseitige Pyramidalzahlen) genannt, so daß die $n$te figurierte Zahl zweiter Ordnung das Dreieck der Zahl n, die $n$te figurierte Zahl dritter Ordnung das Tetraeder der Zahl n heißt. Die Einheiten der $n$ten Trigonalzahl können nämlich in parallele Zeilen zu einem Dreieck zusammengestellt werden, dessen Seiten je n Einheiten enthalten. Die Einheiten der $n$ten Tetraedralzahl können in parallele ähnliche Dreiecke zu einem Tetraeder zusammengestellt werden, dessen Kanten je n Einheiten enthalten. Die figurierten Zahlen höherer Ordnungen sind auf solche Weise nicht konstruierbar.

II. Bei allen x ist

$$1 + (1 + x) + \ldots + (1 + x)^{n-1} = \frac{1 - (1 + x)^n}{1 - (1 + x)} = \frac{(1 + x)^n - 1}{x}$$

Wenn man beiderseits nach Potenzen von x entwickelt, so haben gleiche Potenzen gleiche Coefficienten. Also ist, wie oben,

$$1 + 2 + \ldots + n - 1 = \binom{n}{2}$$

$$1 + \binom{3}{2} + \ldots + \binom{n-1}{2} = \binom{n}{3}, \text{ u. s. w.}$$

III. Die figurierten Zahlen $(n-1)$ter Ordnung treten auf als Coefficienten der Potenzreihe von x, welche, wenn sie konvergent ist, den Wert $\frac{1}{(1-x)^n}$ hat (§. 32). Denn

$$(1 - x)^{-n} = 1 - \binom{-n}{1}x + \binom{-n}{2}x^2 - \ldots$$

Nun ist $-\binom{-n}{1} = \binom{n}{1}$, $\binom{-n}{2} = \frac{-n}{1} \cdot \frac{-n-1}{2} = \binom{n+1}{2}$, u. s. w., folglich

$$(1 - x)^{-n} = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n+1}{2}x^2 + \binom{n+2}{3}x^3 + \ldots$$

$$= 1 + \binom{n}{n-1}x + \binom{n+1}{n-1}x^2 + \binom{n+2}{n-1}x^3 + \ldots$$

2. Wenn man die figurierten Zahlen $m$ter Ordnung der Reihe nach mit den Gliedern der geometrischen Progression $1, v, v^2, v^3, \ldots$ multipliciert, so erhält man eine Reihe von Gliedern, deren Summe s_m sich durch die aus figurierten Zahlen $(m-1)$ter Ordnung auf dieselbe Art gebildete Summe s_{m-1} ausdrücken läßt. Aus den Reihen

$$s_m = \binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} v + \ldots + \binom{m+n-1}{m} v^{n-1}$$

$$vs_m = \binom{m}{m} v + \ldots + \binom{m+n-2}{m} v^{n-1} + \binom{m+n-1}{m} v^n$$

ergiebt sich, weil $\binom{k+1}{m} - \binom{k}{m} = \binom{k}{m-1}$ ist (1),

$$(1-v)s_m = s_{m-1} - \binom{m+n-1}{m} v^n$$

indem man die Summe s_{m-1} aus s_m durch Erniedrigung von m um 1 bildet. Vergl. §. 22, 2. Setzt man demnach

$$s_0 = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1}$$
$$s_1 = 1 + 2v + 3v^2 + \ldots + nv^{n-1}$$
$$s_2 = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} v + \binom{4}{2} v^2 + \ldots + \binom{n+1}{2} v^{n-1}$$

u. s. w., so findet man

$$(1-v)s_0 = 1 - v^n$$
$$(1-v)s_1 = s_0 - nv^n$$
$$(1-v)s_2 = s_1 - \binom{n+1}{2} v^n$$

u. s. w., folglich z. B.

$$(1-v)^3 s_2 = 1 - v^n \left[1 + n(1-v) + \binom{n+1}{2}(1-v)^2\right]$$

3. Wenn man die figurierten Zahlen

$$\binom{m+k-1}{m}, \binom{m+k-1}{m+1}, \binom{m+k-1}{m+2}, \ldots$$

der Reihe nach mit den gegebenen Zahlen $a, b, c, \ldots$ multipliciert und die Produkte addiert, so erhält man die figurierte Zahl im weitern Sinne

$$f_k = a\binom{m+k-1}{m} + b\binom{m+k-1}{m+1} + c\binom{m+k-1}{m+2} + \ldots$$

Die Summe von n solchen figurierten Zahlen ($k = 1, 2, \ldots, n$) ist wiederum eine figurierte Zahl, deren Formel aus f_n durch Erhöhung von m um 1 entsteht. Denn man hat, weil $\binom{m}{m+1} = 0$,

$$f_1 = a\binom{m}{m}$$
$$f_2 = a\binom{m+1}{m} + b\binom{m+1}{m+1}$$
$$f_3 = a\binom{m+2}{m} + b\binom{m+2}{m+1} + c\binom{m+2}{m+2}$$
. . . . . .
$$f_n = a\binom{m+n-1}{m} + b\binom{m+n-1}{m+1} + c\binom{m+n-1}{m+2} + \ldots$$

und findet durch Addition der Kolonnen (1) die Summe

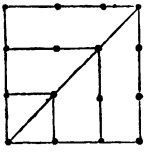
$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n = a\binom{m+n}{m+1} + b\binom{m+n}{m+2} + c\binom{m+n}{m+3} + \ldots$$

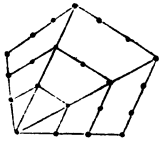
4. Zu den figurierten Zahlen im weitern Sinne gehören die sogenannten Polygonalzahlen, Pyramidalzahlen, Polyedralzahlen. Vergl. Klügel math. W. 3 p. 822 und 930.

I. Unter dem pEck der Zahl n (der $n$ten $p$eckigen Zahl) versteht man die Summe von n Gliedern der Reihe

$$1,\quad 1+p-2,\quad 1+2(p-2),\quad 1+3(p-2),\ldots$$

deren Einheiten zu ähnlichen pEcken mit einem gemeinschaftlichen Scheitel zusammengestellt werden können, wie folgt:





Diese Summe besteht aus n Einheiten und aus $p-2$ Dreiecken von $n-1$ (1), also ist

$$p\text{Eck von } n = n + (p-2)\binom{n}{2}$$

Die Dreiecke der Zahlen sind von den figurierten Zahlen der 2ten Ordnung nicht verschieden, die Vierecke der Zahlen stimmen mit den Quadratzahlen überein, weil

$$n + 2\binom{n}{2} = n^2$$

Die Fünfecke, Sechsecke der Zahlen 1, 2, . ., n sind

1, 5, 12, 22, 35, . ., $\frac{1}{2}n(3n-1)$
1, 6, 15, 28, 45, . ., $n(2n-1)$

Auf dem Perimeter des pEcks von n stehn $p(n-1)$ Einheiten, und innerhalb desselben

$$n + (p - 2)\binom{n}{2} - p(n - 1)$$

$$= p - (p - 1)n + (p - 2)\binom{n}{2} = \tfrac{1}{2}(n - 2)([p - 2]n - p)$$

z. B. in dem Dreieck $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ d. i. das Dreieck von $n-3$,
in dem Viereck $(n-2)^2$ d. i. das Viereck von $n-2$,
in dem Fünfeck $\frac{1}{2}(n-2)(3n-5)$.

II. Unter der *p*seitigen Pyramide der Zahl n versteht man die Summe der *p*Ecke von den Zahlen 1 bis n, deren Einheiten zu ähnlichen *p*seitigen Pyramiden mit gemeinschaftlicher Spitze zusammengestellt werden können. Nach (3) ist

$$p\text{seitige Pyramide von } n = \binom{n+1}{2} + (p-2)\binom{n+1}{3}$$

Die 3seitigen Pyramiden der natürlichen Zahlen sind von den figurierten Zahlen der 3ten Ordnung nicht verschieden. Die 4seitigen, 5seitigen, 6seitigen Pyramiden der natürlichen Zahlen sind

$$1,\quad 5,\quad 14,\quad 30,\quad 55,\ \ldots,\ \binom{n+1}{2}\frac{2n+1}{3}$$

$$1,\quad 6,\quad 18,\quad 40,\quad 75,\ \ldots,\ \binom{n+1}{2}n$$

$$1,\quad 7,\quad 22,\quad 50,\quad 95,\ \ldots,\ \binom{n+1}{2}\frac{4n-1}{3}$$

Ein Kugelhaufen aus rektangulären Schichten, der oben in eine Reihe Kugeln endet, auf dessen Basis in der Breite n, in der Länge $n + r$ Kugeln liegen, enthält eine Anzahl Kugeln, die aus der 4seitigen Pyramide von n und aus r Dreiecken von n besteht, also

$$\binom{n+1}{2}\left(\frac{2n+1}{3} + r\right)$$

ist. Den Rücken bilden $1 + r$ Kugeln.

III. Unter einer $n$ten Polyedralzahl versteht man die Summe von n Gliedern, deren jedes aus Polygonalzahlen so besteht, daß die Einheiten der Polyedralzahlen zu ähnlichen Polyedern mit einer gemeinschaftlichen Ecke zusammengestellt werden können. Wenn das Polyeder e Ecken, f Flächen, k Kanten hat und die gemeinschaftliche Ecke der Polyeder $g$seitig ist, so umfaßt die Differenz der Polyeder von n und $n-1$ auf den nicht gemeinschaftlichen Ecken $e - 1$ Einheiten,

" " " " Kanten $(k - g)(n - 2)$ Einheiten,

" " " " Flächen $(f - g)$ Differenzen der Polygone von n und ihrer Perimeter (I).

Die Differenz der Oktaeder ($e = 6$, $k = 12$, $f = 8$, $g = 4$) ist

$$5 + 8(n - 2) + 4\binom{n-2}{2}$$

und das Oktaeder von n

$$1 + 5(n - 1) + 8\binom{n-1}{2} + 4\binom{n-1}{3} = \tfrac{1}{3}n(2n^2 + 1)$$

Die Differenz der Hexaeder ($e = 8$, $k = 12$, $f = 6$, $g = 3$) ist

$$7 + 9(n - 2) + 3\left[n - 2 + 2\binom{n-2}{2}\right]$$

und das Hexaeder von n

$$1 + 7(n - 1) + 12\binom{n-1}{2} + 6\binom{n-1}{3} = n + 6\binom{n+1}{3} = n^3$$

und die Summe der Hexaeder von 1 bis n

$$\binom{n+1}{2} + 6\binom{n+2}{4} = \binom{n+1}{2}^2$$

Die Differenz der Ikosaeder ($e = 12$, $k = 30$, $f = 20$, $g = 5$) ist

$$11 + 25(n - 2) + 15\binom{n-2}{2}$$

und das Ikosaeder von n

$$1 + 11(n - 1) + 25\binom{n-1}{2} + 15\binom{n-1}{3} = \tfrac{1}{2}n(5n^2 - 5n + 2)$$

Die Differenz der Dodekaeder ($e = 20$, $k = 30$, $f = 12$, $g = 3$) ist

$$19 + 27(n - 2) + 9\left[5 - 4n + 3\binom{n}{2}\right]$$

$= 10 - 9n + 27\binom{n}{2}$ und das Dodekaeder von n

$$10n - 9\binom{n+1}{2} + 27\binom{n+1}{3} = \tfrac{1}{2}n(9n^2 - 9n + 2)$$

$$= \tfrac{1}{2}n(3n - 1)(3n - 2) = n\binom{3n-1}{2}$$

5. Von einer Reihe von Größen sagt man, daß sie eine arithmetische Progression bilden, wenn die Differenzen der auf einander folgenden Größen einander gleich sind. Eine arithmetische Progression ist durch 2 Elemente bestimmt; ist z. B. a das Anfangsglied, d die Differenz der folgenden Glieder, so ist die arithmetische Progression bis zum $n$ten Gliede folgende:

$$a,\quad a + d,\quad a + 2d,\quad \ldots,\quad a + (n - 1)d$$

Die Summe der n ersten Glieder ist (3)

$$na + \binom{n}{2} d = \frac{a + [a + (n-1)d]}{2} n$$

d. h. die halbe Summe des ersten und letzten Gliedes (das arithmetische Mittel derselben) multipliciert mit der Gliederzahl. Man findet diese Summe auch durch die Bemerkung, daß die ersten Glieder vom Anfang und vom Ende dieselbe Summe geben, wie die zweiten Glieder vom Anfang und vom Ende u. s. f.

Beispiele. Die natürlichen Zahlen bilden eine arithmetische Progression, deren Anfangsglied 1 und deren Differenz 1 ist. Die Summe der n ersten Zahlen ist $\binom{n+1}{2}$.

Die ungeraden Zahlen bilden eine arithmetische Progression, deren Anfangsglied 1 und deren Differenz 2 ist. Die Summe der n ersten ungeraden Zahlen ist n^2.

Ungerade Potenzen können durch Summierung bestimmter Mengen von folgenden ungeraden Zahlen gefunden werden. Denn die n^a auf einander folgenden ungeraden Zahlen

$(n-1)n^a + 1$, $(n-1)n^a + 3$, .., $(n-1)n^a + 1 + 2(n^a - 1)$

geben die Summe

$$[(n-1)n^a + 1 + n^a - 1]n^a = n^{2a+1}$$

Insbesondere ist $1^3 = 1$, $2^3 = 3 + 5$, $3^3 = 7 + 9 + 11$, u. s. w. Also ist die Summe der Kuben*)

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + .. + n^3$$

gleich der Summe der $\binom{n+1}{2}$ ersten ungeraden Zahlen. Die letzte dieser Zahlen ist $2\binom{n+1}{2} - 1$, folglich die Summe $\binom{n+1}{2}^2$, wie oben (4).

6. Von einer Reihe von Größen sagt man, daß sie eine arithmetische Progression 2ter, 3ter, .. Ordnung bilden, wenn die Differenzen der auf einander folgenden Größen eine arithmetische Progression 1ter, 2ter, .. Ordnung bilden. Sind t_1, t_2, t_3, .. die gegebenen Größen, so bilde man die Reihe der ersten Differenzen

$$t_2 - t_1 = t_{1,1}, \quad t_3 - t_2 = t_{2,1}, \quad t_4 - t_3 = t_{3,1}, ..$$

die Reihe der zweiten Differenzen d. i. die Differenzen der auf einander folgenden ersten Differenzen

$$t_{2,1} - t_{1,1} = t_{1,2}, \quad t_{3,1} - t_{2,1} = t_{2,2}, \quad t_{4,1} - t_{3,1} = t_{3,2}, ..$$

die Reihe der dritten Differenzen

$$t_{2,2} - t_{1,2} = t_{1,3}, \quad t_{3,2} - t_{2,2} = t_{2,3}, \quad t_{4,2} - t_{3,2} = t_{3,3}, ..$$

*) Diese Bemerkung ist im Altertum gemacht worden. Nicomachus Arithm. II, 20.

u. s. w. Wenn die Reihe der $m$ten Differenzen aus gleichen Gliedern besteht, so ist die Reihe der gegebenen Größen eine arithmetische Progression $m$ter Ordnung*). Z. B.

Gegebene Größen:	1	8	27	64	125	216
Erste Differenzen:		7	19	37	61	91
Zweite Differenzen:			12	18	24	30
Dritte Differenzen:				6	6	6

Die Zahlen 1, 8, 27, .. bilden eine arithmetische Progression 3ter Ordnung, weil ihre 3ten Differenzen einander gleich sind.

Die figurierten Zahlen $m$ter Ordnung bilden eine arithmetische Progression $m$ter Ordnung, weil ihre ersten Differenzen figurierte Zahlen $(m-1)$ter Ordnung (1), folglich ihre $(m-1)$ten Differenzen die natürlichen Zahlen sind, welche eine arithmetische Progression erster Ordnung bilden.

7. Aus dem Anfangsgliede und den Anfangsdifferenzen d. h. aus den Anfangsgliedern der Reihen der 1ten, 2ten, 3ten, .. Differenzen lassen sich die Glieder einer arithmetischen Progression höherer Ordnung und die Summe der ersten n Glieder derselben berechnen. Wenn a_0 das Anfangsglied der gesuchten Progression ist, a_1 die erste ihrer 1ten Differenzen, a_2 die erste ihrer 2ten Differenzen, .., a_m der gemeinschaftliche Wert ihrer $m$ten (letzten) Differenzen, so ist das $n$te Glied der gesuchten Progression**)

$$a_0 + (n-1)a_1 + \binom{n-1}{2}a_2 + .. + \binom{n-1}{m}a_m$$

und die Summe ihrer n ersten Glieder

$$na_0 + \binom{n}{2}a_1 + \binom{n}{3}a_2 + .. + \binom{n}{m+1}a_m$$

Beweis. Die Reihe der $(r-1)$ten Differenzen wird gebildet, indem man zu dem bekannten Anfangsgliede derselben die ersten 1, 2, 3, .. Glieder aus der Reihe der $r$ten Differenzen addiert (6)

$$t_{2,r-1} = t_{1,r-1} + t_{1,r}$$
$$t_{3,r-1} = t_{1,r-1} + t_{1,r} + t_{2,r}$$
$$t_{4,r-1} = t_{1,r-1} + t_{1,r} + t_{2,r} + t_{3,r}$$

u. s. w. Daher ist $t_{n,m-1} = a_{m-1} + (n-1)a_m$.

*) Die Reihen der Differenzen, welche zu einer gegebenen Reihe von Größen gehören, sind bei den Untersuchungen über die figurierten Zahlen gebildet (vergl. 1 und 10), und besonders bei der Erfindung der Differentialrechnung in Betracht gezogen worden. Der Name „arithmetische Progressionen höherer Ordnungen" kommt erst im Anfang des 18ten Jahrhunderts vor bei Lagny (Mém. de Paris 1722 p. 264). Vergl. Euler Calc. diff. I cap. 1 und 2.

**) Diese Formel ist ihrem Inhalte nach von Newton (principia III^b, lemma V.) erfunden, in ihrer heutigen Gestalt von Jac. Bernoulli (ars conj. p. 98) gegeben worden. Euler a. a. O. §. 57.

Indem man die Summe $t_{1,m-1} + \ldots + t_{n-1,m-1}$ bildet (3) und zu a_{m-2} addiert, findet man weiter

$$t_{n,m-2} = a_{m-2} + (n-1)a_{m-1} + \binom{n-1}{2}a_m$$

Unter der Annahme

$$t_{n,m-k} = a_{m-k} + (n-1)a_{m-k+1} + \binom{n-1}{2}a_{m-k+2} + \ldots + \binom{n-1}{k}a_m$$

findet man auf gleiche Weise

$$t_{n,m-k-1} = a_{m-k-1} + (n-1)a_{m-k} + \binom{n-1}{2}a_{m-k+1} + \ldots + \binom{n-1}{k+1}a_m$$

Die angenommene Formel $t_{n,m-k}$ ist richtig, wenn $k = 2$, also gilt sie auch für $k = 3, 4, \ldots, m$. Die Summe der n ersten Glieder der Progression $t_{1,0} + t_{2,0} + \ldots + t_{n,0}$ wird ebenfalls nach (3) berechnet.

8. Wenn $t_1, t_2, t_3, \ldots$ eine arithmetische Progression $m$ter Ordnung mit der letzten Differenz c bilden, und a eine gegebene Zahl ist, so bilden $at_1, at_2, at_3, \ldots$ eine arithmetische Progression $m$ter Ordnung mit der letzten Differenz ac. Denn die Differenzen der abgeleiteten Progression entspringen aus den Differenzen der gegebenen Progression durch Multiplikation mit a, weil $at_{k+1} - at_k = a(t_{k+1} - t_k)$ u. s. f.; wenn also die $m$ten Differenzen der Reihe $t_1, t_2, t_3, \ldots$ einander gleich sind, so sind auch die $m$ten Differenzen der Reihe $at_1, at_2, at_3, \ldots$ einander gleich und $a$mal so groß als jene.

Wenn $t_1, t_2, t_3, \ldots$ eine arithmetische Progression $m$ter Ordnung, $u_1, u_2, u_3, \ldots$ eine arithmetische Progression niederer als $m$ter Ordnung bilden, so bilden $t_1 + u_1, t_2 + u_2, t_3 + u_3, \ldots$ eine arithmetische Progression $m$ter Ordnung. Denn die $n$te unter den $k$ten Differenzen der abgeleiteten Reihe ist die Summe der $n$ten unter den $k$ten Differenzen der gegebenen Reihen, weil

$$t_{k+1} + u_{k+1} - (t_k + u_k) = (t_{k+1} - t_k) + (u_{k+1} - u_k)$$

u. s. w. Nach der Voraussetzung verschwinden die $m$ten Differenzen der Reihe $u_1, u_2, u_3, \ldots$; also sind die $m$ten Differenzen der Reihe $t_1 + u_1, t_2 + u_2, t_3 + u_3, \ldots$ von den $m$ten Differenzen der Reihe $t_1, t_2, t_3, \ldots$ nicht verschieden.

9. Wenn $t_1, t_2, t_3, \ldots$ eine arithmetische Progression $m$ter Ordnung mit der letzten Differenz c bilden, so bilden $t_1, 2t_2, 3t_3, \ldots$ eine arithmetische Progression $(m+1)$ter Ordnung mit der letzten Differenz $(m+1)c$.

Beweis. Für die abgeleitete Reihe ist die $n$te unter den 1ten Differenzen nach der angegebenen Bezeichnung (6)

$$(n+1)t_{n+1} - nt_n = n(t_{n+1} - t_n) + t_{n+1} = nt_{n,1} + t_{n+1}$$

und daher die $n$te unter den 2ten Differenzen

$$(n+1)t_{n+1,1} + t_{n+2} - nt_{n,1} - t_{n+1} = nt_{n,2} + 2t_{n+1,1}$$

Angenommen, die $n$te unter den $k$ten Differenzen sei

$$nt_{n,k} + kt_{n+1,k-1}$$

so findet man die $n$te unter den $(k+1)$ten Differenzen

$$(n+1)t_{n+1,k} + kt_{n+2,k-1} - nt_{n,k} - kt_{n+1,k-1} = nt_{n,k+1} + (k+1)t_{n+1,k}$$

Nun war die $n$te unter den 2ten Differenzen $nt_{n,2} + 2t_{n+1,1}$, folglich ist die $n$te unter den 3ten, .., $(m+1)$ten Differenzen

$$nt_{n,3} + 3t_{n+1,2}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$nt_{n,m+1} + (m+1)t_{n+1,m}$$

Nach der Voraussetzung ist $t_{n,m+1} = 0$, $t_{1,m} = t_{2,m} = \ldots = c$, also haben die $(m+1)$ten Differenzen der abgeleiteten Reihe den gemeinschaftlichen Wert $(m+1)c$.

10. Wenn $t_1, t_2, t_3, \ldots$ eine arithmetische Progression $m$ter Ordnung mit der letzten Differenz c bilden, $u_1, u_2, u_3, \ldots$ eine arithmetische Progression erster Ordnung mit der Differenz d, so bilden die Produkte $t_1u_1, t_2u_2, t_3u_3, \ldots$ eine arithmetische Progression $(m+1)$ter Ordnung mit der letzten Differenz $(m+1)cd$.

Es sei $u_n = a + (n-1)d$, so ist

$$t_nu_n = t_n(a-d) + nt_nd$$

Nun bilden $t_1(a-d), t_2(a-d), \ldots$ eine Progression $m$ter Ordnung, $t_1d, 2t_2d, \ldots$ eine Progression $(m+1)$ter Ordnung (9), folglich $t_1u_1, t_2u_2, \ldots$ eine Progression $(m+1)$ter Ordnung (8), deren letzte Differenz mit der letzten Differenz der Progression $t_1d, 2t_2d, \ldots$ (9) übereinstimmt.

Wenn $u_1, u_2, u_3, \ldots$ eine arithmetische Progression erster Ordnung mit der Differenz d bilden, so bilden demnach

$u_1^2, u_2^2, u_3^2, \ldots$ eine arithm. Progr. 2ter Ordnung
$u_1^3, u_2^3, u_3^3, \ldots$ eine arithm. Progr. 3ter Ordnung
$u_1^m, u_2^m, u_3^m, \ldots$ eine arithm. Progr. $m$ter Ordnung

Die letzte Differenz der Progression $u_1^m, u_2^m, u_3^m, \ldots$ ist*)

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots md^m$$

*) Diese Bemerkungen sind in der ersten Hälfte des 17ten Jahrhunderts gemacht worden. Vergl. Faulhaber academia algebrae, 1631

Angenommen, c sei die letzte Differenz der Progression u_1^k, u_2^k, u_3^k, .., so ist nach dem obigen $c(k+1)d$ die letzte Differenz der Progression u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, u_3^{k+1}, ... Nun ist $2d^2$ die letzte Differenz der Progression u_1^2, u_2^2, u_3^2, .., folglich $1 \cdot 2 \cdot 3d^3$ die letzte Differenz der Progression u_1^3, u_2^3, u_3^3, .., u. s. w.

Wenn u_1, u_2, u_3, .. eine arithmetische Progression erster Ordnung bilden und a_0, a_1, a_2, .. gegebene Zahlen sind, so bilden die Werte

$$\begin{aligned} f_1 &= a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_1^2 + .. + a_m u_1^m \\ f_2 &= a_0 + a_1 u_2 + a_2 u_2^2 + .. + a_m u_2^m \\ f_3 &= a_0 + a_1 u_3 + a_2 u_3^2 + .. + a_m u_3^m \\ &\quad .. \quad .. \quad .. \quad .. \quad .. \end{aligned}$$

eine arithmetische Progression $m$ter Ordnung, weil u_1^2, u_2^2, u_3^2, .. eine Progression 2ter Ordnung bilden, u. s. w. (8).

Beispiel. Weil 1^3, 2^3, 3^3, .. eine arithmetische Progression 3ter Ordnung (10) mit dem Anfangsglied 1, den Anfangsdifferenzen 7, 12, und der letzten Differenz 6 bilden (6), so läßt sich die Summe $1^3 + 2^3 + 3^3 + .. + n^3$ nach (7) berechnen. Ihr Wert ist

$$\begin{aligned} &n + 7\binom{n}{2} + 12\binom{n}{3} + 6\binom{n}{4} \\ &= \binom{n+1}{2} + 6\binom{n+1}{3} + 6\binom{n+1}{4} \\ &= \binom{n+1}{2} + 6\binom{n+2}{4} = \binom{n+1}{2}^2 \end{aligned}$$

wie oben (4).

11. Bei positiven ganzen m kann die Potenz n^m durch m figurierte Zahlen auf verschiedene Arten ausgedrückt werden.

I. Aus $n^2 = \binom{n+1}{2} + \binom{n}{2}$ folgt n^3 durch Multiplikation mit n.

Nun ist

$$\binom{n+1}{2} n = \binom{n+1}{2} \frac{n + 2 + 2(n-1)}{3} = \binom{n+2}{3} + 2\binom{n+1}{3}$$

$$\binom{n}{2} n = \binom{n}{2} \frac{2(n+1) + n - 2}{3} = 2\binom{n+1}{3} + \binom{n}{3}$$

folglich

$$n^3 = \binom{n+2}{3} + 4\binom{n+1}{3} + \binom{n}{3}$$

Daher findet man überhaupt mit fallender Oberzahl

$$n^m = a_1\binom{n+m-1}{m} + a_2\binom{n+m-2}{m} + .. + a_m\binom{n}{m}$$

Nun ist

$$\binom{n+m-k}{m}n = \binom{n+m-k}{m}\frac{k(n+m-k+1)+(m-k+1)(n-k)}{m+1}$$

$$= k\binom{n+m-k+1}{m+1} + (m-k+1)\binom{n+m-k}{m+1}$$

also ($k = 1, 2, .., m$)

$$n^{m+1} = a_1\binom{n+m}{m+1} + ma_1 \Big| \binom{n+m-1}{m+1} + (m-1)a_2 \Big| \binom{n+m-2}{m+1} + ..$$
$$+ 2a_2 \qquad\qquad + 3a_3 \qquad\qquad +$$

zur Darstellung von n^{m+1} aus der Darstellung von n^m. Z. B.

$$n^4 = \binom{n+3}{4} + 11\binom{n+2}{4} + 11\binom{n+1}{4} + \binom{n}{4}$$

$$n^5 = \binom{n+4}{5} + 26\binom{n+3}{5} + 66\binom{n+2}{5} + 26\binom{n+1}{5} + \binom{n}{5}$$

Diese rekurrente Entwickelung zeigt, daß die Coefficienten a_1 und a_m bei allen m den Wert 1 haben, und daß die übrigen Coefficienten $a_2, .., a_{m-1}$ positive ganze Zahlen sind, welche von dem Exponenten m abhängen.

II. Die Vertauschung von n mit $-n$ giebt

$$(-1)^m n^m = a_1\binom{-n+m-1}{m} + a_2\binom{-n+m-2}{m} + .. + a_m\binom{-n}{m}$$

Nun ist

$$\binom{-r}{m} = \frac{-r}{1}\cdot\frac{-r-1}{2}\,..\,\frac{-r-m+1}{m}$$

$$= (-1)^m\frac{r}{1}\cdot\frac{r+1}{2}\,..\,\frac{r+m-1}{m} = (-1)^m\binom{r+m-1}{m}$$

folglich ($-r = -n+m-1, -n+m-2, ..$)

$$n^m = a_1\binom{n}{m} + a_2\binom{n+1}{m} + .. + a_m\binom{n+m-1}{m}$$

Die Subtraktion dieses Ausdrucks der Potenz n^m von dem obigen Ausdruck derselben giebt

$$0 = (a_m - a_1)\binom{n+m-1}{m} + (a_{m-1} - a_2)\binom{n+m-2}{m} + ..$$

folglich ($n = 1, 2, ..$)

$$a_m = a_1, \quad a_{m-1} = a_2, \; ..$$

III. Zur Berechnung der Coefficienten $a_1, a_2, ..$ aus dem Exponenten m hat man

$$a_1\binom{n+m-1}{m} + a_2\binom{n+m-2}{m} + .. + a_m\binom{n}{m} = n^m$$

also bei $n = 1, 2, ..$

$$a_1 = 1^m$$
$$a_1\binom{m+1}{1} + a_2 = 2^m$$
$$a_1\binom{m+2}{2} + a_2\binom{m+1}{1} + a_3 = 3^m$$

oder

$$a_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1^m \\ \binom{m+1}{1} & 2^m \end{vmatrix} \qquad a_3 = \begin{vmatrix} 1 & & 1^m \\ \binom{m+1}{1} & 1 & 2^m \\ \binom{m+2}{2} & \binom{m+1}{1} & 3^m \end{vmatrix}$$

Die Entwickelungen

$$a_2 = 2^m - 1^m\binom{m+1}{1}$$
$$a_3 = 3^m - 2^m\binom{m+1}{1} + 1^m\binom{m+1}{2}$$

lassen vermuten, daß die Determinante a_k nach der letzten Kolonne entwickelt geben werde

$$a_k = k^m - \binom{m+1}{1}(k-1)^m + \binom{m+1}{2}(k-2)^m + ..$$

In der That ist unter dieser Voraussetzung

$$a_r + a_{r-1}\binom{m+1}{1} + .. + a_1\binom{m+r-1}{r-1}$$
$$= r^m - \binom{m+1}{1}(r-1)^m + \binom{m+1}{2}(r-2)^m - \binom{m+1}{3}(r-3)^m + ..$$
$$+ \binom{m+1}{1}\left\{(r-1)^m - \binom{m+1}{1}(r-2)^m + \binom{m+1}{2}(r-3)^m - ..\right\}$$
$$+ \binom{m+2}{2}\left\{(r-2)^m - \binom{m+1}{1}(r-3)^m + ..\right\}$$
$$+ \binom{m+3}{3}\left\{(r-3)^m - ..\right\}$$
$$+ ..$$

so daß $(r-t)^m$ den Coefficienten

$$\binom{m+t}{t} - \binom{m+t-1}{t-1}\binom{m+1}{1} + \binom{m+t-2}{t-2}\binom{m+1}{2} - ..$$

hat. Nun ist (II)

$\binom{m+t}{t} = (-1)^t\binom{-m-1}{t}$, $\binom{m+t-1}{t-1} = (-1)^{t-1}\binom{-m-1}{t-1}$, . .

also der Coefficient von $(r-t)^m$

$$(-1)^t\left\{\binom{-m-1}{t}+\binom{-m-1}{t-1}\binom{m+1}{1}+\binom{-m-1}{t-2}\binom{m+1}{2}+\cdot\cdot\right\}$$
$$= (-1)^t\binom{-m-1+m+1}{t} = 0$$

nach §. 25, 5. Mithin bleibt nur das Anfangsglied r^m übrig, wie es sein soll.

Über diese in der Theorie der Fakultäten (§. 23, 2) gestellte Aufgabe vergl. Klügel math. Wört. 2 p. 196, 4 p. 599. Die Aufgabe ist mit Hilfe der Lagrangeschen Interpolationsformel gelöst worden von Cauchy Résumés analytiques, Turin 1833 p. 34. Vergl. Worpitzky 1883 Crelle J. 94 p. 207 ff.

12. Man kann n^m durch m figurierte Zahlen mit steigender Unterzahl ausdrücken. Weil $\binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1} = \binom{n}{k+1}$, so ist

$$\binom{n}{k}n = k\binom{n}{k} + (k+1)\binom{n}{k+1}$$

Nun ist $n^2 = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}$, folglich

$$n^3 = \binom{n}{1} + 6\binom{n}{2} + 6\binom{n}{3}$$

$$n^m = b_1\binom{n}{1} + b_2\binom{n}{2} + \cdot\cdot + b_m\binom{n}{m}$$

Zur Berechnung der Coefficienten $b_1, b_2, \cdot\cdot$ aus dem Exponenten m hat man ($n = 1, 2, \cdot\cdot$)

$$1^m = b_1$$
$$2^m = b_1 \cdot 2 + b_2$$
$$3^m = b_1 \cdot 3 + b_2\binom{3}{2} + b_3$$
$$4^m = b_1 \cdot 4 + b_2\binom{4}{2} + b_3\binom{4}{3} + b_4$$

u. s. w., so daß

$$b_4 = \begin{vmatrix} 1 & & & 1^m \\ 2 & 1 & & 2^m \\ 3 & \binom{3}{2} & 1 & 3^m \\ 4 & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & 4^m \end{vmatrix}$$

Wie oben (11. III) findet man

$$b_k = k^m - \binom{k}{1}(k-1)^m + \binom{k}{2}(k-2)^m - \ldots$$

13. Man kann auch n^m durch m figurierte Zahlen mit steigender Ober- und Unterzahl ausdrücken. Weil

$$\binom{n+k}{k+1}\frac{n+k+1}{k+2} = \binom{n+k+1}{k+2}$$

so ist $\binom{n+k}{k+1}n = (k+2)\binom{n+k+1}{k+2} - (k+1)\binom{n+k}{k+1}$. Nun ist $n^2 = 2\binom{n+1}{2} - \binom{n}{1}$, folglich

$$n^3 = 3!\binom{n+2}{3} - 6\binom{n+1}{2} + n$$

$$n^4 = 4!\binom{n+3}{4} - 36\binom{n+2}{3} + 14\binom{n+1}{2} - n$$

$$n^m = c_1\binom{n}{1} - c_2\binom{n+1}{2} + c_3\binom{n+2}{3} - \ldots$$

ein Polynomium von m Gliedern. Zur Berechnung der Coefficienten c hat man ($n = -1, -2, \ldots$)

$$(-1)^m = c_1\binom{-1}{1}$$

$$(-2)^m = c_1\binom{-2}{1} - c_2\binom{-1}{2}$$

$$(-3)^m = c_1\binom{-3}{1} - c_2\binom{-2}{2} + c_3\binom{-1}{3}$$

$$(-4)^m = c_1\binom{-4}{1} - c_2\binom{-3}{2} + c_3\binom{-2}{3} - c_4\binom{-1}{4}$$

u. s. w. Oder nach (11. II)

$$(-1)^m = -c_1\binom{1}{1}$$

$$(-2)^m = -c_1\binom{2}{1} - c_2\binom{2}{2}$$

$$(-3)^m = -c_1\binom{3}{1} - c_2\binom{3}{2} - c_3\binom{3}{3}$$

$$(-4)^m = -c_1\binom{4}{1} - c_2\binom{4}{2} - c_3\binom{4}{3} - c_4\binom{4}{4}$$

oder, wenn $\varepsilon = (-1)^{m-1}$,

$$1^m = \varepsilon c_1$$
$$2^m = \varepsilon c_1 \cdot 2 + \varepsilon c_2$$
$$3^m = \varepsilon c_1 \cdot 3 + \varepsilon c_2 \binom{3}{2} + \varepsilon c_3$$
$$4^m = \varepsilon c_1 \cdot 4 + \varepsilon c_2 \binom{4}{2} + \varepsilon c_3 \binom{4}{3} + \varepsilon c_4$$

u. s. w. Demnach ist (12)

$$\varepsilon c_k = b_k$$

14. Die Summe der n folgenden $m$ten Potenzen

$$s_m = 1^m + 2^m + \ldots + n^m$$

kann nach (3) berechnet werden, nachdem man die einzelnen Potenzen durch figurierte Zahlen ausgedrückt hat (11, 12, 13). Z. B.

$$n^2 = \binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} = 2\binom{n+1}{2} - \binom{n}{1} \text{ giebt}$$

$$s_2 = \binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{3} = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3} = 2\binom{n+2}{3} - \binom{n+1}{2}$$
$$= \binom{n+1}{2}\frac{2n+1}{3}$$

$$n^3 = \binom{n+2}{3} + 4\binom{n+1}{3} + \binom{n}{3} \text{ giebt}$$

$$s_3 = \binom{n+3}{4} + 4\binom{n+2}{4} + \binom{n+1}{4} = \binom{n+1}{2}^2$$

Die Potenzsumme s_m kann aber auch rekurrent durch die Summen $s_0, s_1, s_2, \ldots$, sowie independent durch eine Potenzreihe von n ausgedrückt werden. Nach dem binomischen Lehrsatz (§. 23) ist

$$(n+1)^{m+1} = n^{m+1} + \binom{m+1}{1} n^m + \binom{m+1}{2} n^{m-1} + \ldots$$

$$(n-1)^{m+1} = n^{m+1} - \binom{m+1}{1} n^m + \binom{m+1}{2} n^{m-1} - \ldots$$

folglich

$$(n+1)^{m+1} - (n-1)^{m+1} = 2\binom{m+1}{1} n^m + 2\binom{m+1}{3} n^{m-2} + \ldots$$

und insbesondere ($n = 1, 2, \ldots$)

$$2^{m+1} = 2\binom{m+1}{1}1^m + 2\binom{m+1}{3}1^{m-2} + \ldots$$

$$3^{m+1} - 1^{m+1} = 2\binom{m+1}{1}2^m + 2\binom{m+1}{3}2^{m-2} + \ldots$$

$$4^{m+1} - 2^{m+1} = 2\binom{m+1}{1}3^m + 2\binom{m+1}{3}3^{m-2} + \ldots$$

u. ſ. w. Die Summation von n ſolchen Zeilen giebt

$$(n+1)^{m+1} + n^{m+1} - 1 = 2\binom{m+1}{1}s_m + 2\binom{m+1}{3}s_{m-2} + \ldots + 2\binom{m+1}{1+2k}s_{m-2k} + \ldots$$

eine Reihe, welche endigt bei geraden m mit $2s_0$, bei ungeraden m mit $2(m+1)s_1$. Insbeſondere iſt alſo:

$$(n+1)^3 + n^3 - 1 = 2 \cdot 3s_2 + 2s_0$$

$$(n+1)^5 + n^5 - 1 = 2 \cdot 5s_4 + 2\binom{5}{3}s_2 + 2s_0$$

$$(n+1)^7 + n^7 - 1 = 2 \cdot 7s_6 + 2\binom{7}{3}s_4 + 2\binom{7}{5}s_2 + 2s_0$$

. . . . . .

$$(n+1)^4 + n^4 - 1 = 2 \cdot 4s_3 + 2 \cdot 4s_1$$

$$(n+1)^6 + n^6 - 1 = 2 \cdot 6s_5 + 2\binom{6}{3}s_3 + 2 \cdot 6s_1$$

$$(n+1)^8 + n^8 - 1 = 2 \cdot 8s_7 + 2\binom{8}{3}s_5 + 2\binom{8}{5}s_3 + 2 \cdot 8s_1$$

. . . . . .

Nun iſt $s_0 = n$, $s_1 = \binom{n+1}{2}$, daher findet man

$$s_2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$s_4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{2n^3}{6} - \frac{n}{30}$$

$$s_6 = \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{3n^5}{6} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42}$$

. . . . . .

$$s_1 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

$$s_3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{3n^2}{12}$$

$$s_5 = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12}$$

$$s_7 = \frac{n^8}{8} + \frac{n^7}{2} + \frac{7n^6}{12} - \frac{7n^4}{24} + \frac{n^2}{12}$$

. . . . . .

15. Hierdurch wird es bestätigt, daß die Potenzsumme s_m eine bestimmte Funktion $(m+1)$ten Grades von n ist, und zwar teilbar durch n, während $s_3, s_5, s_7, \ldots$ durch n^2 teilbar sind. Man hat demnach den Ausdruck

$$s_m = a_0 n^{m+1} + a_1 n^m + a_2 n^{m-1} + \ldots + a_m n$$

und in demselben die Coefficienten $a_0, a_1, \ldots$ aus dem Exponenten m zu berechnen. Ebenso ist

$$s_{m-2} = b_0 n^{m-1} + b_1 n^{m-2} + b_2 n^{m-3} + \ldots$$

$$s_{m-4} = c_0 n^{m-3} + c_1 n^{m-4} + c_2 n^{m-5} + \ldots$$

u. s. w., wo $b_k, c_k, d_k, \ldots$ aus a_k entspringen, wenn $m-2$, $m-4$, $m-6, \ldots$ an die Stelle von m treten. Nach (14) ist nun

$$2\binom{m+1}{1}(a_0 n^{m+1} + \ldots) + 2\binom{m+1}{3}(b_0 n^{m-1} + \ldots) + \ldots$$

$$= (n+1)^{m+1} + n^{m+1} - 1$$

$$= 2n^{m+1} + \binom{m+1}{1} n^m + \binom{m+1}{2} n^{m-1} + \ldots + \binom{m+1}{m} n$$

bei allen n. Folglich haben n^{m+1}, n^m, $n^{m-1}, \ldots$ beiderseits gleiche Coefficienten (Algebra §. 4, 1), nämlich

$$\binom{m+1}{1} a_0 = 1, \quad a_0 = \frac{1}{m+1}, \quad b_0 = \frac{1}{m-1}, \ldots$$

$$\binom{m+1}{1} a_1 = \tfrac{1}{2}\binom{m+1}{1}, \quad a_1 = \tfrac{1}{2}, \quad b_1 = \tfrac{1}{2}, \ldots$$

$$\binom{m+1}{1} a_3 + \binom{m+1}{3} b_1 = \tfrac{1}{2}\binom{m+1}{3}, \quad a_3 = 0, \quad b_3 = 0, \ldots$$

$$\binom{m+1}{1} a_5 + \binom{m+1}{3} b_3 + \binom{m+1}{5} c_1 = \tfrac{1}{2}\binom{m+1}{5}$$

also $a_5 = 0$, $b_5 = 0, \ldots$ Ebenso findet man $a_7 = 0$, $a_9 = 0, \ldots$

Dagegen hat man für $a_2, a_4, a_6, \ldots$

$$\binom{m+1}{1}a_2 + \binom{m+1}{3}b_0 = \tfrac{1}{2}\binom{m+1}{2}$$

$$\binom{m+1}{1}a_4 + \binom{m+1}{3}b_2 + \binom{m+1}{5}c_0 = \tfrac{1}{2}\binom{m+1}{4}$$

$$\binom{m+1}{1}a_6 + \binom{m+1}{3}b_4 + \binom{m+1}{5}c_2 + \binom{m+1}{7}d_0 = \tfrac{1}{2}\binom{m+1}{6}$$

u. s. w. Nun ist $\binom{m+1}{3}b_0$ teilbar durch $\binom{m+1}{2}$, folglich $\binom{m+1}{1}a_2$ teilbar durch $\binom{m+1}{2}$, a_2 teilbar durch m, b_2 teilbar durch $m-2, \ldots$ Daher sind $\binom{m+1}{3}b_2$, $\binom{m+1}{5}c_0$, also auch $\binom{m+1}{1}a_4$ teilbar durch $\binom{m+1}{4}$, und a_4 teilbar durch $\binom{m}{3}$, b_4 teilbar durch $\binom{m-2}{3}, \ldots$ Daher sind ferner $\binom{m+1}{3}b_4$, $\binom{m+1}{5}c_2$, $\binom{m+1}{7}d_0$, also auch $\binom{m+1}{1}a_6$ teilbar durch $\binom{m+1}{6}$, und a_6 teilbar durch $\binom{m}{5}$. U. s. w. Man setzt demnach

$$a_{2k} = (-1)^{k-1}\frac{B_{2k-1}}{2k}\binom{m}{2k-1}$$

$a_2 = \frac{1}{2}B_1 m$, $a_4 = -\frac{1}{4}B_3\binom{m}{3}$, $a_6 = \frac{1}{6}B_5\binom{m}{5}$, .., wo

$$B_1 = \tfrac{1}{6},\quad B_3 = \tfrac{1}{30},\quad B_5 = \tfrac{1}{42}, \ldots$$

die Bernoullischen Zahlen heißen, und erhält die Potenzsumme s_m ausgedrückt durch die Bernoullische Potenzreihe

$$s_m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \tfrac{1}{2}n^m$$

$$+ \tfrac{1}{2}B_1 m n^{m-1} - \tfrac{1}{4}B_3\binom{m}{3}n^{m-3} + \tfrac{1}{6}B_5\binom{m}{5}n^{m-5} - \ldots$$

Die Reihe endigt bei geraden m mit $a_m n$, wo

$$a_m = (-1)^{\frac{1}{2}m-1}\frac{B_{m-1}}{m}\binom{m}{m-1} = (-1)^{\frac{1}{2}m-1}B_{m-1}$$

Bei ungeraden m ist $a_m = 0$, und die Reihe endigt mit $a_{m-1}n^2$, wo

$$a_{m-1} = (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)-1}\frac{B_{m-2}}{m-1}\binom{m}{m-2} = (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)-1}\frac{mB_{m-2}}{2}$$

Bei $n = 1$ ist $s_m = 1$, und man hat

$$1 = \frac{1}{m+1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}B_1 m - \tfrac{1}{4}B_3\binom{m}{3} + \tfrac{1}{6}B_5\binom{m}{5} - \ldots$$

zur rekurrenten Berechnung der Zahlen $B_1, B_3, B_5, \ldots$

$$m = 2,\ 1 = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} + B_1,\ B_1 = \tfrac{1}{6}$$

$$m = 4,\ 1 = \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - B_3,\ B_3 = \tfrac{1}{30}$$

u. s. w.

Die Summe der Quadrate kommt bei Archimedes Spiral. 10 vor. Die Summen der Biquadrate und höherer Potenzen wurden von Fermat u. a. hinzugefügt. Vergl. die Anmerkungen zu 1 und zu §. 12, 6. Die Potenzreihe von n, in welche die Summe s_m entwickelt werden kann, ist von Jac. Bernoulli Ars conjectandi p. 97 ohne den Beweis gegeben worden. Beweise findet man bei Moivre 1730 Misc. analyt. lib. 6, Euler Calc. diff. I §. 29 und II §. 132, Klügel math. Wört. 3 p. 864, u. a. Auch in andern von Euler Calc. diff. II c. 5 ff. entwickelten Ausdrücken, namentlich in den Potenzreihen von x, welche Euler daselbst §. 221 ff. für $1 - x \cot x$ und für $\operatorname{tang} x$ gegeben hat, treten die Zahlen $B_1, B_3, B_5, \ldots$ auf, und sind deshalb von Euler „die Bernoullischen Zahlen" genannt worden. Aus diesen Entwickelungen hat zuerst Laplace einen independenten Ausdruck einer Bernoullischen Zahl formiert Mém. de Paris 1777 p. 106. Vergl. Lacroix Traité III, 975. Pfaff in Klügels math. Wört. 4 p. 608. Grunert in den Zusätzen zu Klügels math. Wört. art. Bernoullische Zahlen. Scherk Crelle J. 4 p. 304. Staudt Crelle J. 21 p. 372. Kronecker Liouville J. 1856 2. Serie 1 p. 385 und Crelle J. 94 p. 269. Stern Crelle J. 88 p. 85. Worpitzky Crelle J. 94 p. 207 und Schlömilch Zeitschrift t. 29 p. 45. Lipschitz Crelle J. 96 p. 1.

16. Einen direkten Weg zu independenter Darstellung einer Bernoullischen Zahl hat Kronecker Crelle J. 94 p. 268 gezeigt. Die ganze Funktion, welche bei allen positiven ganzen x den Wert

$$1^{m-1} + 2^{m-1} + \ldots + (x-1)^{m-1}$$

hat, ist (15) eine Potenzreihe $m$ten Grades von $x - 1$, also eine Funktion desselben Grades von x, und wird durch $f(x)$ bezeichnet. Nach der Lagrangeschen Interpolationsformel (Algebra §. 10, 3) wird diese Funktion konstruiert aus den Werten, welche sie bei $m + 1$ Werten von x hat, z. B. aus

$$f(0) = 0,\ f(1) = 0,\ f(2) = 1^{m-1},\ f(3) = 1^{m-1} + 2^{m-1}, \ldots,$$
$$f(m) = 1^{m-1} + 2^{m-1} + \ldots + (m-1)^{m-1}$$

Unter dieser Voraussetzung ist $f(x)$ die Summe der $m - 1$ Glieder

$$f(2)\frac{x(x-1)\ \ldots\ \ldots\ (x-m)}{2(2-1)(x-2)(2-3)\ldots(2-m)}$$

$$+ f(3)\frac{x(x-1)\ \ldots\ \ldots\ (x-m)}{3(3-1)(3-2)(x-3)(3-4)\ldots(3-m)} + \ldots$$

$$= \frac{x(x-1)\ldots(x-m)}{m!}\left\{\frac{(-1)^{m-2}m!\,f(2)}{2!(m-2)!(x-2)} + \frac{(-1)^{m-3}m!\,f(3)}{3!(m-3)!(x-3)} + \ldots\right\}$$

$$= \frac{x(x-1)\,..\,(x-m)}{(-1)^m m!}\left\{\binom{m}{2}\frac{f(2)}{x-2} - \binom{m}{3}\frac{f(3)}{x-3} + ..\right\}$$

oder entwickelt $A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + .. + A_{m-1} x$.

Indem man $f(x)$ durch x dividiert und in dem Quotienten $x = 0$ setzt, findet man

$$A_{m-1} = -\binom{m}{2}\frac{f(2)}{2} + \binom{m}{3}\frac{f(3)}{3} - ..$$

Bei geraden $m-1$ ist (15)

$$A_{m-1} = (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)-1} B_{m-2}$$

folglich hat man

$$(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} B_{m-2} = \binom{m}{2}\frac{f(2)}{2} - \binom{m}{3}\frac{f(3)}{3} + ..$$

zur independenten Berechnung der Bernoullischen Zahl B_{m-2}.

Bei ungeraden $m-1$ ist $A_{m-1} = 0$. Z. B. Bei $m-1 = 4$ ist

$$B_3 = \binom{5}{2}\frac{f(2)}{2} - \binom{5}{3}\frac{f(3)}{3} + \binom{5}{4}\frac{f(4)}{4} - \binom{5}{5}\frac{f(5)}{5} = \frac{1}{30}$$

Bei $m-1 = 5$ ist

$$0 = \binom{6}{2}\frac{f(2)}{2} - \binom{6}{3}\frac{f(3)}{3} + \binom{6}{4}\frac{f(4)}{4} - \binom{6}{5}\frac{f(5)}{5} + \binom{6}{6}\frac{f(6)}{6}$$

§. 29. Die Wahrscheinlichkeit.

(Beis §. 91.)

1. Wenn unter gegebenen Umständen von n Ereignissen $A, B, C, ..$ eines wie das andere möglich ist, aber nur eines wirklich eintreten wird, entweder A, oder B, oder $C, ..$, so haben die einzelnen Ereignisse dieselbe Wahrscheinlichkeit (probabilitas), die bei zunehmender Anzahl n der möglichen Fälle abnimmt. Setzt man die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A bei n möglichen Ereignissen $= 1 : n$, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß von den beiden Ereignissen A und B eines eintritt, $= 2 : n$, u. s. w. Überhaupt ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses das Verhältnis der Anzahl der günstigen Fälle (chance), in welchen der Erwartung genügt wird, zu der Anzahl der möglichen Fälle*). Das Ereignis ist

*) Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung wurden um die Mitte des 17ten Jahrhunderts gestellt und gelöst, namentlich von Fermat und Pascal 1654 (Pascal oeuvres éd. Lahure II p. 392. 429). Die Begründung und Erweiterung solcher Berechnungen hat Huygens 1657 in der Abhandlung de ratociniis in ludo aleae begonnen. Genauere Ausführungen dieser Theorie verdankt man Jacob Bernoulli (ars conjectandi 1713, wo zuerst probabilitas gradus certitudinis p. 211 vorkommt) und Moivre (doctrine of chances 1717, vollständiger 1738). Weiteres findet man bei Laplace théorie anal. des probab. 1812. 3me éd. 1820.

unmöglich, wenn seine Wahrscheinlichkeit 0;
unwahrscheinlich, wenn seine Wahrscheinlichkeit $< \frac{1}{2}$;
ungewiß, wenn seine Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$;
wahrscheinlich, wenn seine Wahrscheinlichkeit $> \frac{1}{2}$;
gewiß, wenn seine Wahrscheinlichkeit 1 ist.

Beispiel 1. Die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel eine bestimmte Nummer zu werfen, ist $\frac{1}{6}$. Zwei Würfel können auf 6^2 verschiedene Arten fallen. Unter diesen Würfen sind 6 Päsche, und 6 Würfe, deren Nummern die Summe 7 geben. Also ist die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln einen Pasch zu werfen, $\frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$. Ebensogroß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln 7 zu werfen.

Beispiel 2. Fünf Würfel können auf 6^5 verschiedene Arten fallen. Unter diesen Würfen kommen 3 gleiche Nummern auf $\binom{5}{3}.6.5.4$ verschiedene Arten vor, weil 3 bestimmte Nummern auf je 3 Würfeln stehen können, und weil 3 gleiche Nummern 6fach da sind, während der 4te Würfel eine der übrigen 5, der 5te eine der übrigen 4 Nummern zeigt. Also ist die Wahrscheinlichkeit, mit 5 Würfeln 3 gleiche Nummern zu werfen

$$\frac{\binom{5}{3}.6.5.4}{6^5} = \frac{25}{162} = \frac{1}{6{,}48}$$

Beispiel 3. Von 52 Blättern, deren je 13 von einer Farbe sind, können 3 auf $\binom{52}{3}$ verschiedene Arten gezogen werden. Diese Blätter sind $\binom{13}{3}$mal von derselben bestimmten Farbe. Also ist die Wahrscheinlichkeit, 3 gleichfarbige Blätter zu ziehen,

$$4\binom{13}{3} : \binom{52}{3} = \frac{22}{425} = \frac{1}{19{,}32}$$

Beispiel 4. Von 90 Nummern können 5 auf $\binom{90}{5}$ verschiedene Arten gezogen werden. Dabei erscheinen von 12 besetzten Nummern 3 auf $\binom{12}{3}$ verschiedene Arten mit irgend 2 von den 78 unbesetzten Nummern, mithin $\binom{12}{3}\binom{78}{2}$mal. Also ist die Wahrscheinlichkeit, bei 12 besetzten Nummern eine Terne zu gewinnen,

$$\binom{12}{3}\binom{78}{2} : \binom{90}{5} = \frac{1}{66{,}52}$$

Wenn man alle Ternen der 12 Nummern besetzt, so gewinnt man, so oft eine jener Ternen mit irgend 2 der übrigen Nummern gezogen wird, mithin bei $\binom{12}{3}\binom{78}{2}$ Ziehungen. Also ist die Wahrscheinlichkeit, eine besetzte Terne zu gewinnen,

$$\binom{12}{3}\binom{78}{2} : \binom{90}{5} = \frac{1}{53{,}4}$$

Beispiel 5. Wenn in einer Urne a schwarze, b weiße, c rote Kugeln sich befinden, so können $\alpha+\beta+\gamma$ Kugeln auf $\binom{a+b+c}{\alpha+\beta+\gamma}$ verschiedene Arten gezogen werden. Dabei kann eine Kombination von α schwarzen Kugeln zugleich mit einer Kombination von β weißen Kugeln und einer Kombination von γ roten Kugeln $\binom{a}{\alpha}\binom{b}{\beta}\binom{c}{\gamma}$mal vorkommen. Also ist die Wahrscheinlichkeit, auf einen Zug α schwarze, β weiße, γ rote Kugeln zu erhalten,

$$\binom{a}{\alpha}\binom{b}{\beta}\binom{c}{\gamma} : \binom{a+b+c}{\alpha+\beta+\gamma}$$

Beispiel 6. Von n Kugeln, die in einer Urne liegen, kann man irgend wieviele auf

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+..$$

verschiedene Arten ergreifen; eine ungerade Anzahl auf

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+..$$

verschiedene Arten, eine gerade Anzahl auf

$$\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\binom{n}{6}+..$$

verschiedene Arten. Nun ist nach dem binomischen Lehrsatze (§. 23, 4) für $x = \pm 1$

$$1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+.. = 2^n$$

$$1-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-.. = 0$$

folglich

$$2+2\binom{n}{2}+2\binom{n}{4}+.. = 2^n$$

$$2\binom{n}{1}+2\binom{n}{3}+.. = 2^n$$

oder

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \ldots = 2^{n-1} - 1$$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots = 2^{n-1}$$

Also sind die Wahrscheinlichkeiten, eine gerade oder eine ungerade Anzahl zu ergreifen,

$$\frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1}, \quad \frac{2^{n-1}}{2^n - 1}$$

2. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses und die Wahrscheinlichkeit, daß dasselbe nicht eintritt, ergänzen sich zu 1 (Gewißheit). Gesetzt, unter n Fällen sind m Fälle, in denen das Ereignis eintritt, so giebt es unter n Fällen $n - m$ Fälle, in denen das Ereignis nicht eintritt. Also ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\frac{m}{n}$, und die Wahrscheinlichkeit, daß dasselbe nicht eintritt,

$$\frac{n - m}{n} = 1 - \frac{m}{n}$$

Z. B. Die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln 7 zu werfen, ist $\frac{1}{6}$ und die Wahrscheinlichkeit, nicht 7 zu werfen, ist $\frac{5}{6}$.

3. Die Wahrscheinlichkeit, daß unter den voneinander unabhängigen Ereignissen E, F, G, .. irgend eines eintritt, entweder E, oder F, oder G, .., ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse.

Beweis. Wenn E, F, G einzeln die Wahrscheinlichkeiten p, q, r haben, und überhaupt unter N Fällen m_1 Fälle sind, in denen E eintritt, m_2 Fälle, in denen F eintritt, m_3 Fälle, in denen G eintritt, so giebt es unter N Fällen $m_1 + m_2 + m_3$ Fälle, in denen eines der Ereignisse E, F, G eintritt. Also ist die Wahrscheinlichkeit, daß entweder E, oder F, oder G eintritt,

$$\frac{m_1 + m_2 + m_3}{N} = \frac{m_1}{N} + \frac{m_2}{N} + \frac{m_3}{N}$$
$$= p + q + r$$

Z. B. Die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln entweder einen Pasch oder 7 zu werfen, ist $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. Die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln entweder 7, oder 8, oder 9 zu werfen, ist $\frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{1}{9} = \frac{5}{12}$.

4. Die Ereignisse E, F, G, .. heißen konträr, wenn es gewiß ist, daß eines derselben eintritt. Nun ist die Wahrscheinlichkeit, daß entweder E, oder F, oder G, .. eintritt, die Summe der Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse (3), und diese hat den Wert 1, weil $m_1 + m_2 + m_3 + .. = N$. Also sind die Ereignisse E, F, G, .. konträr, wenn die Summe ihrer Wahrscheinlichkeit den Wert 1 (Gewißheit) hat.

Insbesondere sind E und Nicht-E konträr, d. h. es ist gewiß, daß entweder E eintritt, oder E nicht eintritt. In der That ergänzen sich nach (2) die Wahrscheinlichkeiten von E und von Nicht-E zu 1.

5. Bei den Ereignissen E, F, G, .. kann die relative Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E in Betracht gezogen werden, d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß unter den Ereignissen E, F, G, .. das Ereignis E eintritt. Diese relative Wahrscheinlichkeit von E ist das Verhältnis der Wahrscheinlichkeit von E zu der Wahrscheinlichkeit, daß eines der Ereignisse E, F, G, .. eintritt. Denn nach den obigen Voraussetzungen (3) giebt es unter $m_1 + m_2 + m_3 + ..$ Fällen m_1 Fälle, in denen E eintritt; also ist die relative Wahrscheinlichkeit von E

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3 + ..} = \frac{\frac{m_1}{N}}{\frac{m_1}{N} + \frac{m_2}{N} + \frac{m_3}{N} + ..}$$

$$= \frac{p}{p + q + r + ..}$$

Z. B. Die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfeln 3 gleiche Nummern zu werfen, ist $\frac{6}{6^3}$. Die Wahrscheinlichkeit, mit denselben Würfeln nur 2 gleiche Nummern zu werfen, ist $\binom{3}{2}\frac{6 \cdot 5}{6^3}$. Vergl. Beisp. 2 in (1). Daher ist die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfeln vielmehr 2 gleiche Nummern als 3 gleiche Nummern zu werfen,

$$\frac{3 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 5 + 6} = \frac{15}{16}.$$

Wenn die gegebenen Ereignisse konträr sind (4), so ist die relative Wahrscheinlichkeit eines unter ihnen von der absoluten Wahrscheinlichkeit desselben nicht verschieden.

6. Die Wahrscheinlichkeit, daß die voneinander unabhängigen Ereignisse E, F, G, .. zusammentreffen d. h. gleichzeitig oder in

einer bestimmten Ordnung nacheinander eintreten, ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse.

Beweis. Wenn unter n Fällen m Fälle sind, in denen E eintritt (nicht F), und unter n_1 Fällen m_1 Fälle, in denen F eintritt (nicht E), so giebt es unter nn_1 Fällen, in denen die Fälle der ersten Art mit den Fällen der zweiten Art zusammentreffen können, mm_1 Fälle, in denen ein Eintritt von E mit einem Eintritt von F zusammentrifft. Also ist die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens von E und F (des zusammengesetzten Ereignisses EF)

$$\frac{mm_1}{nn_1} = \frac{m}{n} \cdot \frac{m_1}{n_1}$$

Haben die Ereignisse E, F, G einzeln die Wahrscheinlichkeiten p, q, r, so hat das Zusammentreffen von E und F mit G (das Ereignis EFG) die Wahrscheinlichkeit

$$(pq)r = pqr. \quad \text{U. s. w.}$$

Beispiel 1. Wenn die Urne U 5 weiße und 7 schwarze Kugeln enthält, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß unter 6 herausgenommenen Kugeln 2 weiße sind, $\binom{5}{2}\binom{7}{4} : \binom{12}{6}$.

Wenn die Urne V 8 weiße und 10 schwarze Kugeln enthält, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß unter 9 herausgenommenen Kugeln 4 weiße sind, $\binom{8}{4}\binom{10}{5} : \binom{18}{9}$.

Die Wahrscheinlichkeit, daß unter 6 aus U genommenen Kugeln 2 weiße, und zugleich unter 9 aus V genommenen Kugeln 4 weiße sich befinden, ist demnach

$$\binom{5}{2}\binom{7}{4}\binom{8}{4}\binom{10}{5} : \binom{12}{6}\binom{18}{9} = \frac{3675}{26\,741} = \frac{1}{7{,}28}$$

Beispiel 2. Haben die Ereignisse E und F die Wahrscheinlichkeiten p und q, so ist die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens

von E und F	pq
von E und Nicht-F	$p(1-q)$
von Nicht-E und F	$(1-p)q$
von Nicht-E und Nicht-F . .	$(1-p)(1-q)$

Eines der 4 zusammengesetzten Ereignisse muß eintreten, also sind dieselben konträr (4). In der That ist

$$pq + p(1-q) + (1-p)q + (1-p)(1-q) = 1$$

Beispiel 3. Haben die Ereignisse E, F, G die Wahrscheinlichkeiten p, q, r, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß E nicht eintritt und F eintritt, $(1 - p)q$; die Wahrscheinlichkeit, daß E und F nicht eintreten und G eintritt, $(1 - p)(1 - q)r$; also die Wahrscheinlichkeit, daß entweder E eintritt, oder daß F eintritt, wenn E nicht eintritt, oder daß G eintritt, wenn E und F nicht eintreten,

$$p + (1 - p)q + (1 - p)(1 - q)r$$

Beispiel 4. Wenn die Urne U 5 weiße und 1 schwarze Kugel, und die Urne V 3 weiße und 4 schwarze Kugeln enthält, so ist die Wahrscheinlichkeit, in U zu greifen, $\frac{1}{2}$, und die Wahrscheinlichkeit, daß eine aus U genommene Kugel weiß ist, $\frac{5}{6}$. Also ist die Wahrscheinlichkeit, daß die ergriffene Kugel aus U und weiß ist, $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}$. Ebenso ist die Wahrscheinlichkeit, daß die ergriffene Kugel aus V und weiß ist $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}$. Die Wahrscheinlichkeit aber, daß eine aus einer von beiden Urnen genommene Kugel weiß ist, hat den Wert (3)

$$\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{5}{6} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{7} = \tfrac{53}{84}$$

Beispiel 5. Werden Versuche angestellt, bei denen entweder E mit der Wahrscheinlichkeit p, oder F mit der Wahrscheinlichkeit q eintritt, so daß E und F konträr sind und die Summe ihrer Wahrscheinlichkeiten $p + q = 1$: dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei n Versuchen $k$mal E und $(n - k)$mal F in einer bestimmten Ordnung eintritt, $p^k q^{n-k}$. Von k Elementen E und $n - k$ Elementen F giebt es aber $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ Permutationen (§. 25, 4), also ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei n Versuchen $k$mal E und $(n - k)$mal F in beliebiger Ordnung eintritt,

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}\, p^k q^{n-k}$$

Dabei wird gewiß entweder $n$mal E, oder $(n - 1)$mal E und 1mal F, oder $(n - 2)$mal E und 2mal F, .., oder 1mal E und $(n - 1)$mal F, oder $n$mal F eintreten. In der That haben die Wahrscheinlichkeiten, welche aus der gefundenen Formel entspringen, wenn k die Werte n, $n - 1$, .., 1, 0 erhält, die Summe $(p + q)^n = 1$ (§. 23).

Die Wahrscheinlichkeit, daß bei n Versuchen wenigstens $k$mal E eintritt, ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten, daß E $k$mal, $(k + 1)$mal, .., $n$mal eintritt. Die Wahrscheinlichkeit, daß bei n Versuchen höchstens $(k - 1)$mal E eintritt, ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten, daß E 0mal, 1mal, .., $(k - 1)$mal eintritt. Diese beiden Wahrscheinlichkeiten ergänzen sich zu 1.

Analoge Bemerkungen gelten für mehr konträre Ereignisse, welche bei einer Reihe von Versuchen mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten eintreten. Vergl. Seidel, Münchner Berichte 1876 p. 44.

Beispiel 6. Wenn man die Wahrscheinlichkeiten, mit einem Würfel die Nummern 1, 2, 3, .. zu werfen, durch p_1, p_2, p_3, .. bezeichnet, so ist $p_1 + p_2 + p_3 + .. = 1$. Die Wahrscheinlichkeit, mit einem solchen Würfel bei n Würfen $k$mal 1, $l$mal 2, $m$mal 3, .. unter der Bedingung $k + l + m + .. = n$ in beliebiger Ordnung zu werfen, ist

$$\frac{n!}{k!\ l!\ m!\ ..}\ p_1{}^k\, p_2{}^l\, p_3{}^m\ ..$$

Die Wahrscheinlichkeiten aber, die verschiedenen Komplexionen der n Würfe zu erhalten, sind die einzelnen Glieder, aus denen die Potenz $(p_1 + p_2 + p_3 + ..)^n$ besteht (§. 27, 2).

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Summe der n geworfenen Nummern s beträgt, ist die Summe der Glieder von $(p_1 + p_2 + p_3 + ..)^n$, bei denen die Summe der Indices von p den Wert s hat. Vertauscht man p_1 mit $p_1 x$, p_2 mit $p_2 x^2$, p_3 mit $p_3 x^3$, .., so erscheint dieselbe Wahrscheinlichkeit als Coefficient von x^s in $(p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + ..)^n$; mithin als Coefficient von x^s in $\frac{1}{6^n}(x + x^2 + .. + x^6)^n$, wenn die Würfe mit einem vollkommenen gemeinen Würfel gemacht werden, bei welchem $p_1 = p_2 = .. = \frac{1}{6}$ ist. Vergl. Moivre Misc. anal. p. 196 und Euler de partitione numerorum (Nov. Comm. Petrop. 3 und 14).

Die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Wurfes mit n gleichen Würfeln ist nicht verschieden von der Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel bei n Würfen dieselbe Komplexion der Nummern zu erhalten.

7. Wenn die Ereignisse E, F, G, .. die Wahrscheinlichkeiten p, q, r, .. haben und konträr sind, so daß $p + q + r + .. = 1$; wenn ferner nach Vertrag der Eintritt von E, F, G, .. zur Folge hat, daß die Person A, B, C, .. den Gewinn S erlangt, so gebühren vor der Entscheidung den einzelnen Personen die Anteile pS, qS, rS, ... Sind nämlich überhaupt n Fälle möglich, und ebensoviel Personen vorhanden, von denen die 1te, 2te, 3te, .. den Gewinn S erlangt, je nachdem der 1te, 2te, 3te, .. Fall eintritt, so haben alle Personen gleichen Anspruch auf S, folglich gebührt vor der Entscheidung einer jeden Person $\frac{S}{n}$. Wenn nun unter den n Fällen m Fälle sind, in

denen das Ereignis E eintritt, so vereinigt die Person A in sich die Ansprüche von m jener Personen, folglich gebührt ihr vor der Entscheidung $\frac{m}{n}S$ d. i. pS. U. s. f. In der That ist

$$pS + qS + rS + \ldots = (p + q + r + \ldots)S = S$$

Die Produkte des erwarteten Gewinns mit den Wahrscheinlichkeiten der Erlangung heißen die Hoffnungen (partis, exspectationes, sortes) der verschiedenen Personen auf den Gewinn, und verhalten sich zu einander der Reihe nach wie die Wahrscheinlichkeiten, daß der volle Gewinn den einzelnen Teilnehmern zufällt.

Wenn der durch den Eintritt eines der konträren Ereignisse E, F, G, .. von einer der Personen A, B, C, .. zu erlangende Gewinn S von den Teilnehmern des Vertrags aufgebracht werden soll, so müssen die Beiträge derselben pS, qS, rS, .. d. h. ihren Hoffnungen gleich sein, also zu einander der Reihe nach sich verhalten, wie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse E, F, G, .. welche die verschiedenen Personen erwarten. Dieselben Beiträge sind von A, B, C, .. zu leisten, wenn sie zur Wette oder zum Glücksspiele sich vereinigen mit der Bedingung, daß A, B, C, .. die Summe der Einsätze gewinnt, je nachdem E, F, G, .. eintritt.

Wenn insbesondere A behauptet, daß das Ereignis E eintreten werde, B aber das Gegenteil behauptet, und beide zu einer Wette sich vereinigen, so hat der eine pS, der andere $(1 - p)S$ einzusetzen, d. h. B hat dem A das $\frac{1-p}{p}$fache entgegenzubieten.

Einsatz und Gewinn des Spielers sollen sich verhalten wie die Wahrscheinlichkeiten, zu gewinnen und zu verlieren. Dem Einsatz des Spielers wird von der Lotterie oder Spielbank ein Gewinn entgegengesetzt, der die erforderliche Höhe meist nicht erreicht; man rechnet auf die Lust der Menschen am Gewinn ohne Arbeit.

§. 30. Die Kettenbrüche.

(Bels 8. 85 ff.)

1. Wenn man aus den Größen a und b durch successive Divisionen die Kette von Gleichungen

$$a = bq + c$$
$$b = cr + d$$
$$c = ds + e$$

u. ſ. w. bildet, ſo iſt

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{q + \frac{c}{b}}, \quad \frac{c}{b} = \frac{1}{r + \frac{d}{c}}, \ldots$$

$$\frac{b}{a} = \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{\ldots}}}}$$

Dieſe Entwickelung von $b : a$ heißt ein **Kettenbruch** (fractio continua), gebildet aus den **Gliedern** $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{s}$, ..., und wird deshalb auch wie folgt bezeichnet*)

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{q} \dot{+} \frac{1}{r} \dot{+} \frac{1}{s} \dot{+} \ldots$$

Die übergeſetzten Punkte deuten an, daß das Folgende zu dem jedesmal vorhergehenden Nenner gehört.

Der Kettenbruch bleibt unverändert, wenn man den Zähler und den Nenner eines Gliedes und zugleich den Zähler des folgenden Gliedes mit derſelben Zahl multipliciert, weil z. B.

$$\frac{m}{mr + mx} = \frac{1}{r + x}$$

2. Aus der allgemeinern Kette von Gleichungen

$$\begin{aligned} p_1 u \quad &- q_1 u_1 + u_2 = 0 \\ p_2 u_1 \quad &- q_2 u_2 + u_3 = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ p_i u_{i-1} &- q_i u_i + u_{i+1} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

*) Von den früherer Zeit angehörigen Kettenbrüchen (fractio continue fracta) hat Lord Brouncker um 1655 eine berühmte Anwendung gemacht (Wallis opp. I p. 469). Bald darauf gebrauchte Huygens die Kettenbrüche und gab eine Theorie derſelben (Automatum planetarium um 1682 verfaßt). Euler hat den Namen fractio continua eingeführt (Comm. Petrop. 9.); der Ausdruck Kettenbruch iſt im Anfang des 19ten Jahrh. üblich geworden; die obige Bezeichnung rührt von J. H. T. Müller her, Allg. Arithm. 1838. Beſondern Zuwachs erhielt die Lehre von den Kettenbrüchen durch Euler (Nov. Comm. 9. Acta 1779 I), Lampert (Beiträge II, 1 p. 55 und 140), Lagrange (Zuſätze zur franz. Ausgabe von Eulers Algebra, Lyon 1795), Gauß Disq. gen. circa seriem inf. 1812, Möbius Crelle J. 6 p. 215. Die hier mitgeteilte Auffaſſung dieſer Lehre hat man Scheibner zu verdanken. Berichte der Leipz. Geſ. der W. 1864.

findet man

$$\frac{u_1}{u} = \frac{p_1}{q_1 - \frac{u_2}{u_1}}, \quad \frac{u_2}{u_1} = \frac{p_2}{q_2 - \frac{u_3}{u_2}}, \ldots$$

und daher den Kettenbruch

$$\frac{u_1}{u} = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} \cdot \frac{p_3}{q_3} \cdot \ldots$$

Die Größen $u_2, u_3, u_4, \ldots$ können nach und nach sämtlich durch u und u_1 mit Hilfe von $p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots$ ausgedrückt werden. Aus den Resultaten

$$u_i = \mu_i u_1 - \lambda_i u, \quad u_{i+1} = \mu_{i+1} u_1 - \lambda_{i+1} u$$

erhält man dann

$$\frac{u_1}{u} - \frac{\lambda_i}{\mu_i} = \frac{u_i}{\mu_i u}, \quad \frac{u_1}{u} - \frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}} = \frac{u_{i+1}}{\mu_{i+1} u}$$

Wenn nun $\frac{u_i}{\mu_i}$ und $\frac{u_{i+1}}{\mu_{i+1}}$ entgegengesetzte Zahlen sind, so liegt der Kettenbruch $\frac{u_1}{u}$ zwischen den Grenzen $\frac{\lambda_i}{\mu_i}$ und $\frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}}$, welche deshalb Näherungsbrüche heißen. Und wenn u_n verschwindet, so ist $\frac{u_1}{u} = \frac{\lambda_n}{\mu_n}$. Nach Vorstehendem hat man

$$\frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{p_1}{q_1}, \qquad \frac{u_2}{u_1} = \frac{p_2}{q_2} \cdot \frac{p_3}{q_3} \cdot \ldots$$

$$\frac{\lambda_3}{\mu_3} = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2}, \qquad \frac{u_3}{u_2} = \frac{p_3}{q_3} \cdot \frac{p_4}{q_4} \cdot \ldots$$

$$\frac{\lambda_4}{\mu_4} = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} \cdot \frac{p_3}{q_3}, \qquad \frac{u_4}{u_3} = \frac{p_4}{q_4} \cdot \frac{p_5}{q_5} \cdot \ldots$$

u. s. w.

3. Zur Bestimmung der Größen λ_i und μ_i genügt die Bemerkung, daß nach (2) für beliebige Werte von u und u_1

$$p_1(\mu_{i-1} u_1 - \lambda_{i-1} u) - q_i(\mu_i u_1 - \lambda_i u) + \mu_{i+1} u_1 - \lambda_{i+1} u = 0$$

sein muß. Dazu wird erfordert, daß die Coefficienten von u und u_1 verschwinden (Algebra §. 4), d. h.

$$\lambda_{i-1} p_i - \lambda_i q_i + \lambda_{i+1} = 0$$
$$\mu_{i-1} p_i - \mu_i q_i + \mu_{i+1} = 0$$

Dieſes Syſtem dient zur ſucceſſiven Berechnung der Größen λ und μ. Denn man hat

$$u_1 = \mu_1 u_1 - \lambda_1 u, \quad \text{folglich } \lambda_1 = 0, \quad \mu_1 = 1$$
$$u_2 = \mu_2 u_1 - \lambda_2 u, \quad \text{folglich } \lambda_2 = p_1, \quad \mu_2 = q_1$$

und demnach

$$\lambda_3 = \lambda_2 q_2 - \lambda_1 p_2 \qquad \mu_3 = \mu_2 q_2 - \mu_1 p_2$$
$$\lambda_4 = \lambda_3 q_3 - \lambda_2 p_3 \qquad \mu_4 = \mu_3 q_3 - \mu_2 p_3$$

u. ſ. w.

4. Aus dem gefundenen Syſtem (3)

$$\lambda_{i-1} p_i - \lambda_i q_i + \lambda_{i+1} = 0$$
$$\mu_{i-1} p_i - \mu_i q_i + \mu_{i+1} = 0$$

folgen die Relationen

$$\lambda_{i+1}\mu_i - \lambda_i \mu_{i+1} = (\lambda_1 \mu_{i-1} - \lambda_{i-1}\mu_i) p_i$$
$$\lambda_{i+1}\mu_{i-1} - \lambda_{i-1}\mu_{i+1} = (\lambda_1 \mu_{i-1} - \lambda_{i-1}\mu_i) q_i$$

Nun iſt $\lambda_2 \mu_1 - \lambda_1 \mu_2 = p_1$, folglich $\lambda_3 \mu_2 - \lambda_2 \mu_3 = p_1 p_2$, . ., alſo

$$\lambda_{i+1}\mu_i - \lambda_i \mu_{i+1} = p_1 p_2 \,.\, p_i$$

$$\frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}} - \frac{\lambda_i}{\mu_i} = \frac{p_1 \,.\, p_i}{\mu_i \mu_{i+1}}, \qquad \frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}} - \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_{i-1}} = \frac{p_1 \,.\, p_{i-1} q_i}{\mu_{i-1}\mu_{i+1}}$$

Daher ergiebt ſich

$$\frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}} = \frac{\lambda_2}{\mu_2} + \left(\frac{\lambda_3}{\mu_3} - \frac{\lambda_2}{\mu_2}\right) + \,.\, + \left(\frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}} - \frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)$$

$$= \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_1 p_2}{\mu_2 \mu_3} + \frac{p_1 p_2 p_3}{\mu_3 \mu_4} + \,.\, + \frac{p_1 \,.\, p_i}{\mu_i \mu_{i+1}}$$

zur Auflöſung eines Kettenbruchs in ein Polynomium, nach welchem der Kettenbruch beurteilt werden kann, beſonders in dem Falle, daß die Anzahl ſeiner Glieder unendlich groß iſt.

5. Aus dem obigen Syſtem (2)

$$u_i = \mu_i u_1 - \lambda_i u$$
$$u_{i+1} = \mu_{i+1} u_1 - \lambda_{i+1} u$$

folgen die Relationen

$$\mu_{i+1} u_i - \mu_i u_{i+1} = (\lambda_{i+1}\mu_i - \lambda_i \mu_{i+1}) u$$
$$\lambda_{i+1} u_i - \lambda_i u_{i+1} = (\lambda_{i+1}\mu_i - \lambda_i \mu_{i+1}) u_1$$

alſo (4)

$$\mu_{i+1} u_i - \mu_i u_{i+1} = p_1 \,.\, p_i u$$

Eine ähnliche Relation besteht zwischen 3 beliebigen Größen u und kann aus dem System

$$u_h = \mu_h u_1 - \lambda_h u$$
$$u_i = \mu_i u_1 - \lambda_i u$$
$$u_k = \mu_k u_1 - \lambda_k u$$

abgeleitet werden.

6. Aus den gefundenen Werten (4) ergiebt sich

$$\frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}} - \frac{\lambda_i}{\mu_i} : \frac{\lambda_i}{\mu_i} - \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_{i-1}} = \frac{\mu_{i-1} p_i}{\mu_{i+1}}$$

Wenn nun die Zahlen $p_2, p_3, \ldots$ negativ und die Zahlen q positiv sind, so wird $\mu_{i+1} > -\mu_{i-1} p_i$ (3) d. h. die Differenzen der folgenden Brüche $\frac{\lambda}{\mu}$ bilden eine fallende Reihe mit abwechselnden Zeichen. Nun ist

$$\frac{\lambda_3}{\mu_3} - \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{p_1 p_2}{\mu_2 \mu_3}$$

negativ, folglich

$$\frac{\lambda_2}{\mu_2} - \frac{\lambda_3}{\mu_3} > \frac{\lambda_4}{\mu_4} - \frac{\lambda_3}{\mu_3} > \frac{\lambda_4}{\mu_4} - \frac{\lambda_5}{\mu_5} > \frac{\lambda_6}{\mu_6} - \frac{\lambda_5}{\mu_5} > \ldots$$
$$\frac{\lambda_2}{\mu_2} > \frac{\lambda_4}{\mu_4} > \frac{\lambda_6}{\mu_6} > \ldots$$
$$\frac{\lambda_3}{\mu_3} < \frac{\lambda_5}{\mu_5} < \frac{\lambda_7}{\mu_7} < \ldots$$

7. Wenn die Zahlen p Einheiten und die Zahlen q ganze Zahlen sind, so sind λ_i und μ_i relative Primzahlen. Denn ihr größter gemeinschaftlicher Divisor geht in $\lambda_{i+1}\mu_i - \lambda_i \mu_{i+1}$ auf und kann demnach (4) eine Einheit nicht übersteigen.

Wenn $p_1 = 1$, $p_2 = p_3 = \ldots = -1$ und $q_1, q_2 \ldots$ positive ganze Zahlen sind, so bilden die Größen $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \mu_2, \mu_3, \ldots$ steigende Reihen, und zwei folgende Näherungsbrüche können nicht den Quotienten ganzer Zahlen a und b einschließen, von denen b zwischen den Nennern der beiden Näherungsbrüche liegt. Wäre

$$\frac{\lambda_i}{\mu_i} < \frac{a}{b} < \frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}}$$

$$\frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}} - \frac{\lambda_i}{\mu_i} > \frac{a}{b} - \frac{\lambda_i}{\mu_i} \text{ d. h. } \frac{1}{\mu_{i+1}} > \frac{a\mu_i - b\lambda_i}{b}$$

so wäre

$$b > (a\mu_i - b\lambda_i)\mu_{i+1} > \mu_{i+1}$$

weil $a\mu_i - b\lambda_i$ ganz und von 0 verschieden ist.

Beispiel. Um einen Quotienten ganzer Zahlen durch Quotienten kleinerer ganzer Zahlen mit größter Annäherung auszudrücken, verwandelt man ihn nach (1) in einen Kettenbruch und berechnet die Näherungsbrüche. Man findet

$$\frac{5829}{7834} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$$

mit den irreduciblen Näherungsbrüchen

$$\frac{1}{1'}\ \frac{2}{3'}\ \frac{3}{4'}\ \frac{29}{39'}\ \frac{32}{43'}\ \frac{125}{168'}\ \frac{157}{211'}\ \frac{282}{379'}\ \frac{1849}{2485}$$

Die Brüche $\frac{1}{1}, \frac{3}{4}, \frac{32}{43}, \ldots$ bilden eine bis zu dem gegebenen Bruch fallende Reihe, die Brüche $\frac{2}{3}, \frac{29}{39}, \ldots$ eine ebendahin steigende Reihe. Der gegebene Bruch wird durch den Bruch $\frac{125}{168}$ mit dem Fehler $\frac{1}{168 \cdot 211} < \frac{1}{168^2}$ ausgedrückt, und genauer als durch irgend einen Bruch, dessen Nenner 211 nicht erreicht und dessen Zähler eine ganze Zahl ist.

8. Wenn $p_1, p_2, p_3, \ldots$ positive ganze Zahlen sind, so hat der unendliche Kettenbruch

$$\frac{p_1}{p_1+1} - \frac{p_2}{p_2+1} - \frac{p_3}{p_3+1} - \ldots$$

den Wert 1*). Denn man hat (3)

$$\lambda_{i-1}p_i - \lambda_i(p_i+1) + \lambda_{i+1} = 0$$

$$\lambda_{i+1} - \lambda_i = (\lambda_i - \lambda_{i-1})p_i$$

Nun ist $\lambda_3 - \lambda_2 = (\lambda_2 - \lambda_1)p_2 = p_1p_2, \ldots$, also $\lambda_{i+1} - \lambda_i = p_1 \ldots p_i$ d. h. $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \mu_2, \mu_3, \ldots$ sind steigende Reihen positiver ganzer Zahlen. Ferner hat man

$$\mu_{i+1} - \lambda_{i+1} = (\mu_i - \lambda_i)(p_i+1) - (\mu_{i-1} - \lambda_{i-1})p_i$$

*) Vergl. Legendre Géom. Note 4.

Nun ist $\mu_1 - \lambda_1 = 1$, $\mu_2 - \lambda_2 = 1$, $\mu_3 - \lambda_3 = p_2 + 1 - p_2 = 1$, u. s. w. Folglich $1 - \frac{\lambda_i}{\mu_i} = \frac{1}{\mu_i}$ und

$$\lim \frac{\lambda_i}{\mu_i} = 1, \; i = \infty$$

9. Wenn $p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots$ positive ganze Zahlen sind und von einer bestimmten Nummer an $q_i > p_i + 1$, $q_{i+1} > p_{i+1} + 1, \ldots$, so hat der aus unendlich viel positiven oder negativen Gliedern $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots$ gebildete Kettenbruch einen irrationalen Wert unter 1.

Beweis. Man bilde für den gegebenen Kettenbruch Reste von der Form

$$\frac{v_k}{v_{k-1}} = \frac{p_k}{q_k} \dot{\pm} \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \dot{\pm} \frac{p_{k+2}}{q_{k+2}} \dot{\pm} \ldots$$

Dann hat man

$$\frac{v_k}{v_{k-1}} = \frac{p_k}{q_k \pm \frac{v_{k+1}}{v_k}}, \quad \pm v_{k+1} = v_{k-1} p_k - v_k q_k$$

Also sind, wenn z. B. v_{i-1} und v_i ganze Zahlen sind, alle v ganze Zahlen, und der Kettenbruch hat einen rationalen Wert.

Nach der Voraussetzung ist aber

$$p_i < q_i - 1 < q_i \pm \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$$

folglich

$$\frac{p_i}{q_i \pm \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}} < 1, \quad \frac{p_{i+1}}{q_{i+1} \pm \frac{p_{i+2}}{q_{i+2}}} < 1, \ldots$$

$$\frac{p_i}{q_i} \dot{\pm} \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} < 1$$

$$\frac{p_i}{q_i} \dot{\pm} \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} \dot{\pm} \frac{p_{i+2}}{q_{i+2}} < 1$$

u. s. w. Also sind $\frac{v_i}{v_{i-1}}, \frac{v_{i+1}}{v_i}, \frac{v_{i+2}}{v_{i+1}}, \ldots$ echte Brüche.

Gesetzt nun, v_{i-1} und v_i wären ganze Zahlen, so bildeten die ganzen Zahlen $v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots$ eine fallende Reihe mit der Grenze 0, gegen

die Voraussetzung, daß kein Rest des gegebenen Kettenbruchs verschwindet. Demnach kann der Kettenbruch einen rationalen Wert nicht haben.

§. 31. Die Exponentialreihe.

1. I. Eine unendliche Reihe d. h. ein Polynomium von unendlich viel Gliedern $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ ist im allgemeinen nicht der Ausdruck einer bestimmten Größe, sondern nur dann, wenn sie konvergent*) ist, d. h. wenn unter ihren Gliedern eine bestimmte Menge so ausgewählt werden kann, daß die Summe der übrigen Glieder beliebig klein ist. Wenn die unendliche Reihe durch die Summe ihrer n ersten Glieder ausgedrückt wird mit einem Fehler, dessen absoluter Wert die gegebene positive Zahl ε nicht übersteigt, so konvergiert die Reihe und hat um so kleinere Konvergenz, je größer die bei der gegebenen Fehlergrenze ε hinreichende Zahl n ist. Bei verschwindender Konvergenz ist die unendliche Reihe kein brauchbarer Ausdruck einer Größe; eine nicht konvergente Reihe heißt divergent.

II. Die einfachsten Beispiele konvergenter Reihen sind der unendliche Decimalbruch und die unendliche fallende geometrische Progression. Wenn x ein realer echter Bruch ist, so hat die unendliche Reihe $1 + x + x^2 + \ldots$ den Wert $\frac{1}{1-x}$, und wird durch die n ersten Glieder $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$ ausgedrückt mit dem Fehler $\frac{x^n}{1-x}$. Der Fehler ist $< \varepsilon$, wenn die Anzahl n so groß genommen wird, daß $x^n < \varepsilon(1-x)$. Vergl. §. 11, 8. §. 12 und 22. Bei größeren x muß für denselben Zweck die Anzahl n vergrößert werden; die Konvergenz der Progression wird geringer. Wenn x bis 1 steigt, so ist keine endliche Anzahl n genügend; die Konvergenz der Progression verschwindet.

Bei allen positiven $x < 1$ ist die unendliche Reihe

$$x + x(1-x) + x(1-x)^2 + \ldots$$

konvergent und hat den Wert $\frac{x}{1-(1-x)} = 1$, welcher durch die n ersten Glieder ausgedrückt wird mit dem Fehler $(1-x)^n$. Dieser Fehler ist $< \varepsilon$, wenn bei gegebenen x eine hinreichend große Anzahl n von Gliedern summiert wird. Bei kleineren x muß n vergrößert werden,

*) Series infinita convergens nach Newton, der zuerst unendliche Reihen (Potenzreihen) zur Darstellung von Größen in umfassender Weise angewendet hat.

bei verſchwindenden x iſt keine endliche Anzahl n hinreichend. In der That hat bei $x = 0$ die Reihe nicht den Wert 1, ſondern 0.

III. Bei poſitiven α iſt die unendliche Reihe

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdot\cdot$$

konvergent, wenn $\alpha > 1$. Durch Vereinigung von 2, 4, 8, .. Gliedern findet man*)

$$\frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} > \frac{2}{4^\alpha}$$

$$\frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha} > \frac{4}{8^\alpha}$$

u. ſ. w., dagegen

$$\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} < \frac{2}{2^\alpha}$$

$$\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} < \frac{4}{4^\alpha}$$

u. ſ. w. Folglich liegt die betrachtete Reihe zwiſchen

$$1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{4^{\alpha-1}} + \cdot\cdot\right) \text{ und } 1 + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{4^{\alpha-1}} + \cdot\cdot\right)$$

Die eingeſchloſſene Reihe iſt eine geometriſche Progreſſion; aber nur dann fallend, wenn $\alpha > 1$, und hat unter dieſer Vorausſetzung den Wert $\frac{1}{2^{\alpha-1} - 1}$. Alſo iſt z. B. die unendliche Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdot\cdot$$

(die ſogenannte harmoniſche Reihe, Algebra §. 1, 9) nicht konvergent. Auch die Reihen

$$1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \cdot\cdot \text{ und } \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \cdot\cdot$$

ſind nicht konvergent; denn die Glieder der erſten Reihe ſind größer als die Glieder der zweiten Reihe, und dieſe ſind halb ſo groß als die Glieder der Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$

IV. Wenn r poſitiv ganz, ſo iſt

$$\frac{1}{r(r+1)} + \frac{1}{r+1} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{1}{(r-1)r} + \frac{1}{r} = \frac{1}{r-1}$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

*) Poinſot bei Stainville Mélanges d'analyse 1815 p. 368. Einen andern Beweis hat Cauchy gegeben Analyse algébr. c. 6, §. 3. Vergl. Euler Introd. I c. 10 und 15.

$$\frac{1}{2\,.\,3}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{2}=1$$

folglich durch Addition der Kolonnen

$$\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{2\,.\,3}+\,..\,+\frac{1}{r(r+1)}=1-\frac{1}{r+1}$$

Daher ist die unendliche Reihe $\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{2\,.\,3}+\,..\,=1$. Nun ist

$$(1-\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4})+\,..\,=\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{3\,.\,4}+\,..$$
$$<\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{2\,.\,3}+\,..$$

folglich $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\,..\,<1$, eine konvergente Reihe, aber von geringer Konvergenz, weil die Summe der Reihe mit einem kleinen Fehler nur aus einer großen Anzahl von Gliedern gefunden wird.

V. Wenn das Glied $u_r=a_r+ib_r$ komplex*) ist bei $r=0, 1, 2, ..$, so ist die Reihe $u_0+u_1+u_2+\,..$ konvergent unter der Bedingung, und nicht ohne die Bedingung, daß die Reihen $a_0+a_1+a_2+\,..$ und $b_0+b_1+b_2+\,..$ beide konvergent sind.

Der absolute Wert (Betrag, Modul, Größe) der Zahl u_r wird durch $|u_r|$ bezeichnet; dann ist (§. 16, 10)

$$|u_0+u_1+u_2+\,..|\leqq|u_0|+|u_1|+|u_2|+\,..$$

Wenn nun die Reihe der absoluten Werte der Glieder $|u_0|+|u_1|+\,..$ konvergent ist, so ist die Reihe $u_0+u_1+u_2+\,..$ konvergent, und wird absolut konvergent (unbedingt konvergent) genannt. Dabei sind auch die Reihen $a_0+a_1+\,..$ und $b_0+b_1+\,..$ absolut konvergent, weil weder $|a_r|$ noch $|b_r|$ den Wert $|u_r|$ übersteigt.

VI. Wenn die Glieder $u_0, u_1, u_2, ..$ positiv sind, z. B. die absoluten Werte der Glieder einer unendlichen Reihe von positiven und negativen oder von komplexen Gliedern, und wenn von dem Glied u_k an die folgenden Glieder die Glieder einer fallenden geometrischen Progression nicht übersteigen, d. h. $(q<1)$

$$u_{k+1}\leqq u_kq,\quad u_{k+2}\leqq u_{k+1}q\leqq u_kq^2,\,..$$

so ist die unendliche Reihe $u_0+u_1+u_2+\,..$ konvergent und wird

*) Die Reihen komplexer Glieder sind von Euler, umfassender von Cauchy 1821 Anal. alg. c. 9 und Nouv. Exercices 1840 t. 3, und von Abel 1826 Crelle J. 1 p. 313 betrachtet worden.

durch ihre $k + r$ ersten Glieder $u_0 + u_1 + .. + u_{k+r-1}$ ausgedrückt mit dem Fehler

$$u_{k+r} + u_{k+r+1} + .. \leqq u_k q^r (1 + q + q^2 + ..) \leqq \frac{u_k q^r}{1 - q}$$

welcher eine vorgeschriebene Fehlergrenze ε nicht erreicht, wenn

$$q^r < \frac{\varepsilon(1 - q)}{u_k}$$

Dies wird durch einen bestimmten Exponenten r geleistet, weil q ein echter Bruch (II).

2. I. Wenn eine unendliche Reihe von positiven und negativen in bestimmter Ordnung gegebenen Gliedern nicht absolut konvergent ist (1. V), aber eine bestimmte Konvergenz hat und einen Wert, welcher mit beliebig kleinem Fehler durch die n ersten Glieder der Reihe ausgedrückt wird, so erhält sie durch veränderte Einstellung der negativen Glieder zwischen die positiven Glieder im allgemeinen eine andere Konvergenz und einen andern Wert, oder sie hört auf konvergent zu sein. Eine solche Reihe ist bedingt konvergent genannt worden; ihre Konvergenz und ihr Wert ist abhängig von der gegebenen Anordnung der Glieder, während eine absolut konvergente Reihe einen von der Anordnung ihrer Glieder unabhängigen Wert hat*). Z. B. die unendliche Reihe bei positiven α

$$1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + ..$$

hat bei ungeraden k die Fortsetzung

$$\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} + \left(\frac{1}{(k+2)^\alpha} - \frac{1}{(k+3)^\alpha}\right) + ..$$

$$= \frac{1}{k^\alpha} - \left(\frac{1}{(k+1)_\alpha} - \frac{1}{(k+2)^\alpha}\right) - ..$$

welche zwischen $\frac{1}{k_\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}$ und $\frac{1}{k^\alpha}$ liegend weniger als $\frac{1}{k^\alpha}$ beträgt und bei hinreichend großen k beliebig klein wird. Also ist die Reihe

$$1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + ..$$

bei positiven α konvergent, während sie nur bei $\alpha > 1$ absolut konvergent ist (1. III). Man bilde nun

*) Bemerkung Dirichlets (Abhandl. der Berliner Akad. 1837 p. 48). Die Besonderheit sogenannter semikonvergenter Reihen war von Legendre 1811 Exerc. de calcul intégral t. 1 p. 267 bemerkt worden. Vergl. Gauß' Reihe 1812, Werke 3 p. 152. Lacroix Traité t. 3 art. 1000.

$$t_r = \frac{1}{(2r-1)^\alpha} - \frac{1}{(2r)^\alpha}$$

$$u_r = \frac{1}{(4r-3)^\alpha} - \frac{1}{(4r-2)^\alpha} + \frac{1}{(4r-1)^\alpha} - \frac{1}{(4r)^\alpha}$$

$$v_r = \frac{1}{(4r-3)^\alpha} + \frac{1}{(4r-1)^\alpha} - \frac{1}{(2r)^\alpha}$$

Dann haben die Reihen $t_1 + t_2 + \ldots$ und $u_1 + u_2 + \ldots$ dieselben Glieder in derselben Ordnung, und bei verschiedener Konvergenz denselben Wert, weil $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = t_1 + t_2 + \ldots + t_{2n}$. Dagegen hat die Reihe

$$v_1 + v_2 + \ldots = \left(1 + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{2^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha}\right) + \ldots$$

dieselben Glieder in andrer Ordnung. Nun findet man

$$v_r = u_r + \frac{t_r}{2^\alpha} + \frac{2 - 2^\alpha}{(4r)^\alpha}$$

folglich ist die Reihe

$$v_1 + v_2 + \ldots = u_1 + u_2 + \ldots + \frac{1}{2^\alpha}(t_1 + t_2 + \ldots) + \frac{2 - 2^\alpha}{4^\alpha}\left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots\right)$$

bei $\alpha \geqq 1$ konvergent, aber von andrer Konvergenz und andrem Wert als die Reihe $t_1 + t_2 + \ldots$ Bei $\alpha < 1$ ist die Reihe $v_1 + v_2 + \ldots$ nicht konvergent, weil $1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots$ nicht konvergent ist.

II. Wenn eine Reihe von positiven Gliedern und eine Reihe von negativen Gliedern jede für sich divergent ist, und wenn die folgenden Glieder derselben mehr und mehr der Null sich nähern, so kann aus beiden durch successive Einreihung der (negativen) Glieder der zweiten Reihe zwischen die (positiven) Glieder der ersten Reihe eine konvergente unendliche Reihe gebildet werden, deren Wert von der Anordnung der Glieder abhängt*).

Damit die Reihe den beliebig gegebenen positiven Wert C ausdrücke, nehme man so lange Glieder der ersten Reihe, bis die Summe über C steigt, dann so lange Glieder der zweiten Reihe, bis die Summe unter C fällt, u. s. w. abwechselnd. Der Fehler der Summe übersteigt

*) Riemann 1854 über die trigonometrischen Reihen. Gött. Abhandl. Bd. 13, Werke p. 221.

nicht den Betrag ihres letzten Gliedes und wird nach hinreichender Fortsetzung des angezeigten Verfahrens beliebig klein.

III. Eine bestimmte konvergente Reihe a besteht aus einem Polynomium A von endlicher Gliederzahl und der unendlichen Fortsetzung α der Art, daß bei hinreichend vielen Gliedern des Polynomium A die Fortsetzung α beliebig klein ist. Ebenso sei die konvergente Reihe $b = B + \beta$, mithin

$$a + b = A + \alpha + B + \beta$$

Indem man A und B so bestimmt, daß $|\alpha| < \frac{1}{\varepsilon}$ und $|\beta| < \frac{1}{2}\varepsilon$, erhält man

$$|a + b - (A + B)| < |\alpha + \beta| < |\alpha| + |\beta| < \varepsilon$$

Ferner ist $ab = (A + \alpha)(B + \beta) = AB + B\alpha + (A + \alpha)\beta$. Indem man B und A so bestimmt, daß

$$|\beta| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|} \quad \text{und} \quad |\alpha| < \frac{\varepsilon}{2|B|}$$

erhält man $|B\alpha + (A + \alpha)\beta| < \varepsilon$, folglich

$$|ab - AB| < \varepsilon$$

Demnach werden die Summe $a + b$ und das Produkt ab konvergenter Reihen durch die Summe $A + B$ und das Produkt AB von Polynomien von endlichen Gliederzahlen ausgedrückt mit beliebig kleinen Fehlern. Man rechnet mit einer endlichen Menge konvergenter Reihen wie mit irrationalen Zahlen (§. 16, 4). Aber die unendlichen Reihen, deren Glieder man durch Addition und Multiplikation der Glieder von nicht absolut konvergenten Reihen bildet, sind nicht unabhängig von der Ordnung ihrer Glieder (I). Vergl. Cauchy Anal. alg. c. 6 und Abel Crelle J. 1 p. 311.

3. I. Eine Variable wird auf ein bestimmtes Gebiet (Bereich, Bezirk, champ, région, domaine, district) beschränkt, wenn ihre Werte auf der Zahlenebene (§. 16, 10) Punkte haben, welche einer bestimmten Linie der Zahlenebene angehören, oder daselbst von einem bestimmten Perimeter eingeschlossen (umgeben) werden. Ein zusammenhängendes Gebiet besteht entweder aus einer Strecke (Bogen) der Zahlenebene oder aus einer Planfigur von einer Zelle, deren Perimeter sich selbst nicht schneidet, und umfaßt demnach eine einfache Serie oder eine Doppelserie von Werten der Variablen. Ein Gebiet im weitern Sinne besteht aus getrennten Strecken oder aus einer Planfigur von mehr Zellen. Das Gebiet der realen Zahlen von -1 bis 2 (ein Intervall) ist die

Strecke, in deren Endpunkten die Grenzen -1 und 2, die untere und die obere Grenze des Intervalls, sich befinden. Von der Zahl a bis zur Zahl b giebt es auf der Zahlenebene einen kürzesten Weg und beliebig viel andere Wege auf Linien komplexer Zahlen.

Wenn y von x abhängt der Art, daß jedem x eines gegebenen Gebiets ein bestimmtes y entspricht, so heißt y eine bestimmte Funktion von x (Algebra §. 2). Dem gegebenen Gebiet der Variablen x entspricht ein bestimmtes Gebiet der Funktion y, und die Funktion heißt demgemäß **bestimmt in dem gegebenen Gebiet** der Variablen.

II. Wenn die Glieder einer unendlichen Reihe von der Variablen x abhängen, so hat die Reihe bei verschiedenen x größere oder kleinere Konvergenz, oder sie ist divergent. Das Gebiet der Variablen, in welchem die Reihe konvergent ist, d. h. das Gebiet der Werte x, bei welchen die Reihe konvergent ist, wird das **Konvergenzgebiet der Reihe** genannt. Die Reihe dient als **Definition einer eindeutig bestimmten Funktion der auf das Konvergenzgebiet beschränkten Variablen**. Für Werte der Variablen, welche dem Konvergenzgebiet nicht angehören, d. h. bei welchen die Reihe keine endliche Konvergenz hat, wird die Funktion durch die Reihe nicht definiert. Reihen mit bestimmten Konvergenzgebieten sind namentlich die **Potenzreihe von** x

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

bei gegebenen Coefficienten, und die daraus entspringenden **trigonometrischen Reihen von** ω, z. B.

$$a_0 + a_1 \cos\omega + a_2 \cos 2\omega + \ldots$$

III. Wenn keines der positiven Glieder a_0, $a_1 b$, $a_2 b^2$, .. die Größe c übersteigt, so ist die **Potenzreihe von** x

$$(A) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

konvergent bei allen x, deren absolute Werte b nicht erreichen. Denn die Glieder dieser Reihe übersteigen nicht die Glieder der fallenden geometrischen Progression

$$c, \quad c\frac{x}{b}, \quad c\frac{x^2}{b^2}, \ldots$$

folglich ist sie absolut konvergent (1. VI). Bei denselben x konvergieren zugleich die abgeleiteten Reihen

$$(B) \qquad a_0 x + \tfrac{1}{2} a_1 x^2 + \tfrac{1}{3} a_2 x^3 + \ldots$$

d. i. $x(a_0 + \frac{1}{2} a_1 x + \frac{1}{3} a_2 x^2 + \ldots)$, und

$$(C) \qquad a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots$$

Die Glieder der Reihe C überſteigen nicht die Glieder

$$\frac{c}{b},\ 2\frac{c}{b}\frac{x}{b},\ 3\frac{c}{b}\frac{x^2}{b^2},\ \ldots$$

welche von einem beſtimmten Glied an die Glieder einer fallenden geometriſchen Progreſſion nicht erreichen. Denn man findet

$$(k+1)\frac{c}{b}\frac{x^k}{b^k} : k\frac{b}{c}\frac{x^{k-1}}{b^{k-1}} = \frac{k+1}{k}\frac{x}{b} = q$$

$$\frac{k+2}{k+1}\frac{x}{b} < q \quad (\S.\ 12,\ 3)$$

u. ſ. w., und $q < 1$, wenn $k > \frac{x}{b-x}$.

IV. Wenn nur reale x in Betracht gezogen werden, ſo ſind die Potenzreihen A, B, C konvergent unter der Bedingung $|x| < b$; ihr Konvergenzgebiet iſt die Strecke, welche zwiſchen $-b$ und b enthalten iſt. Bei verſchiedenen x dieſer Strecke haben die Reihen im allgemeinen verſchiedene Konvergenz, bei $x = 0$ die größte, bei wachſenden $|x|$ abnehmende, bei allen x endliche Konvergenz. An den Grenzen des Konvergenzgebietes iſt die Konvergenz der Reihen im allgemeinen nicht zu entſcheiden.

Bei komplexen Werten der Coefficienten a und der Variablen x iſt die Potenzreihe A von x nebſt den zugehörigen Potenzreihen B und C konvergent und zwar absolut konvergent, wenn $|x| < |b|$, d. h. bei allen x, deren Punkte auf der Zahlenebene eingeſchloſſen (umgeben) ſind von dem Kreis, deſſen Centrum der Nullpunkt und deſſen Radius $= |b|$ iſt. Dieſer das Konvergenzgebiet der Potenzreihe einſchließende Kreis heißt der Konvergenzkreis der Potenzreihe. Bei verſchiedenen x des eingeſchloſſenen Konvergenzgebietes haben die Potenzreihen A, B, C im allgemeinen verſchiedene Konvergenz, bei $x = 0$ die größte, bei wachſenden $|x|$ abnehmende, bei allen x endliche Konvergenz. Der Radius des Konvergenzkreiſes iſt nach den Coefficienten a der Potenzreihe verſchieden zwiſchen 0 und ∞. Bei der Potenzreihe von $x - p$

$$a_0 + a_1(x-p) + a_2(x-p)^2 + \ldots$$

hat ihr Konvergenzkreis das Centrum p.

Beiſpiele. 1) $1 + x + x^2 + \ldots$ (1. II) iſt eine Potenzreihe von x, deren Konvergenzkreis um den Nullpunkt mit dem Radius 1 beſchrieben wird. Für alle x des Konvergenzgebietes hat die Reihe den

Wert $\frac{1}{1-x}$, bei wachsenden $|x|$ mit abnehmender Konvergenz. Wenn x auf oder außer dem Konvergenzkreis liegt, so ist die Reihe nicht konvergent. Die zugehörigen Reihen

$$x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \ldots \text{ und } 1 + 2x + 3x^2 + \ldots$$

haben denselben Konvergenzkreis; die erstere konvergiert noch bei $x = -1$ (1. IV).

2) $x + x(1-x) + x(1-x)^2 + \ldots$ (1. II) ist eine Potenzreihe von $1-x$, deren Konvergenzkreis um den Punkt 1 mit dem Radius 1 beschrieben wird. Bei allen x des eingeschlossenen Konvergenzgebietes, insbesondere bei realen x zwischen 0 und 2, hat die Reihe den Wert 1, mit größter Konvergenz bei $x = 1$, u. s. w. Bei $x = 2$ ist die Reihe nicht konvergent; bei verschwindenden x hat die Reihe verschwindende Konvergenz; bei $x = 0$ hat sie nicht den Wert 1, sondern 0.

3) $1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \ldots$ ist eine Potenzreihe von x mit der Fortsetzung

$$(k+1)!\,x^{k+1} + (k+2)!\,x^{k+2} + \ldots = k!\,x^k\{(k+1)x + (k+1)(k+2)x^2 + \ldots\}$$

Wenn nun $(k+1)|x| > 1$, so ist $(k+2)|x| > 1$, u. s. w., also hat die Fortsetzung keinen endlichen Wert. Die Potenzreihe hat bei $x = 0$ den Wert 1, bei andern x ist sie nicht konvergent, ihr Konvergenzkreis hat den Radius 0.

4) Bei der Potenzreihe von x

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

ist

$$\left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} : \frac{x^k}{k!}\right| = \left|\frac{x}{k+1}\right| < 1$$

unter der Bedingung $k + 1 > |x|$, u. s. w. Folglich hat diese Potenzreihe einen unendlichen Konvergenzkreis, sie ist konvergent bei allen endlichen x.

V. Andre unendliche Reihen, deren Glieder von einer Variablen abhängen, haben anders begrenzte Konvergenzgebiete.

1) Die Potenzreihe von $\frac{1}{x}$

$$S = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots$$

habe einen Konvergenzkreis vom Radius $\frac{1}{c}$, d. h. sie sei konvergent bei

allen $\left|\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{c}$. Dann ist sie konvergent bei allen $|x| > c$. Die Potenzreihe von x

$$T = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$$

habe einen Konvergenzkreis vom Radius $d > c$, d. h. sie sei konvergent bei allen $|x| < d$. Folglich ist die Reihe $S + T$ konvergent bei allen $|x|$ zwischen c und d, ihr Konvergenzgebiet wird durch die beiden concentrischen Kreise begrenzt.

2) Die unendliche Reihe

$$R = 1 + \frac{1}{x + x^{-1}} + \frac{1}{x^2 + x^{-2}} + \ldots$$

$$= 1 + \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{x^2}{x^4 + 1} + \ldots$$

hat ein unendliches Konvergenzgebiet beiderseits des auf der Zahlenebene um den Nullpunkt mit dem Radius 1 beschriebenen Kreises. Bei $|x| = 1$ ist R nicht konvergent (1. III). Bei $|x| < 1$ z. B. $|x| = 1 - \alpha$ ist $|x^{2k}| < 1 - \alpha$, folglich

$$|1 + x^{2k}| > 1 - |x^{2k}| > 1 - (1 - \alpha)$$

$$\left|\frac{x^k}{x^{2k} + 1}\right| < \left|\frac{x^k}{\alpha}\right|$$

für $k = 1, 2, \ldots$, so daß $\alpha|R| < 1 + |x| + |x^2| + \ldots$ Also hat R bei $|x| < 1$ einen endlichen Wert. Durch Vertauschung von x mit $\frac{1}{x}$ wird R nicht verändert.

3) Unter der Voraussetzung $|q| < 1$ ist die Jacobische Reihe, deren Glieder aus $q^{rr} x^r$ dadurch entstehn, daß für r alle negativen und alle positiven ganzen Zahlen gesetzt werden, konvergent bei allen x außer 0 und ∞. Für positive $r = k$, $k + 1$ erhält man

$$\left|\frac{q^{(k+1)^2} x^{k+1}}{q^{kk} x^k}\right| = |q^{2k+1} x| < 1$$

bei endlichen x durch hinreichend große endliche k. Also ist der Teil der Reihe, welcher durch positive r entsteht, bei endlichen x konvergent. Für negative r erhält man

$$\left|\frac{q^{(k+1)^2}}{x^{k+1}} : \frac{q^{kk}}{x^k}\right| = \left|\frac{q^{2k+1}}{x}\right| < 1$$

bei allen x außer 0 und ∞ durch hinreichend große endliche k. Also ist der andre Teil der Reihe konvergent bei allen x außer 0 und ∞.

Das Konvergenzgebiet der Jacobischen Reihe von x wird begrenzt durch den verschwindenden und durch den unendlichen Kreis um den Nullpunkt.

VI. Wenn eine von x abhängige Reihe bei $x = c$ einen bestimmten Wert hat, so kann es sich ereignen, daß die Reihe in naher Umgebung von c d. h. bei hinreichend kleinen $|x - c|$ eine beliebig kleine Konvergenz, in der nächsten Umgebung von c bei verschwindenden $|x - c|$ verschwindende Konvergenz hat. In solchem Ausnahmefall liegt c innerhalb des Konvergenzgebietes der Reihe, ohne diesem Gebiet anzugehören; das Konvergenzgebiet der Reihe hat bei c eine Lücke, und die Reihe wird nicht bei allen x ihres Konvergenzgebietes durch dieselbe endliche Anzahl ihrer Glieder mit einer vorgeschriebenen Fehlergrenze ausgedrückt.

Eine von x abhängige Reihe, welche ein bestimmtes Konvergenzgebiet und in demselben ohne Ausnahme endliche Konvergenz hat, ist innerhalb ihres Konvergenzgebietes **gleichmäßig konvergent**, **in gleichem Grade konvergent**, **vollständig konvergent** genannt worden*). Durch diese Benennung soll es jedoch nicht ausgeschlossen werden, daß bei verschiedenen x des Konvergenzgebietes zum Ausdruck der Reihe auch kleinere Anzahlen von Gliedern genügen. In diesem Sinne sind „gleichmäßig konvergent" namentlich die Potenzreihen innerhalb ihrer Konvergenzkreise, sowie die oben angeführten von x abhängigen Reihen innerhalb ihrer Konvergenzgebiete. Eine Reihe mit einem lückenhaften Konvergenzgebiet wird unten §. 32, 7. IV gegeben.

4. Der Wert, welchen $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ bei unendlichem m erhält, ist nur von x abhängig und wird bei endlichen x durch die absolut konvergente Reihe ausgedrückt**)

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdot\cdot$$

Beweis. Bei ganzen positiven m ist nach §. 23

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = 1 + m\frac{x}{m} + m\frac{m-1}{2}\frac{x^2}{m^2} + m\frac{m-1}{2}\frac{m-2}{3}\frac{x^3}{m^3} + \cdot\cdot$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{1}{m}\right) + \frac{x^3}{3!}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right) + \cdot\cdot$$

---

*) Nach Weierstraß. Vergl. Heine Crelle J. 71 p. 353. Kugelfunktionen 1 p. 65 und 2 p. 353. Die genaueren Bestimmungen wurden veranlaßt durch die Bemerkungen über einen Satz von Cauchy (Anal. alg. c. 6, §. 1), welche Abel Crelle J. 1 p. 316 und Seidel Münchener Akad. 1848 Bd. 5 p. 381 gemacht hatten.

**) Euler Introd. I §. 115.

ein Polynomium von $1 + m$ Gliedern. Wenn x und m gegeben sind so ist der Quotient successiver Glieder

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right) .. \left(1 - \frac{k}{m}\right) \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} : \left(1 - \frac{1}{m}\right) .. \left(1 - \frac{k-1}{m}\right) \frac{x^k}{k!}$$
$$= \left(1 - \frac{k}{m}\right) \frac{x}{k+1}$$

abnehmend bei steigenden k, und < 1 unter der Bedingung

$$\left(1 - \frac{k}{m}\right) |x| < k + 1, \text{ d. i. } k > \frac{|x| - 1}{1 + \frac{|x|}{m}}$$

Also wird das Polynomium mit einer vorgeschriebenen Fehlergrenze durch eine bestimmte Anzahl seiner ersten Glieder ausgedrückt (1. VI). Nun ist

$$1 > 1 - \frac{1}{m} > \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right) > .. > \left(1 - \frac{1}{m}\right) .. \left(1 - \frac{n}{m}\right)$$
$$> \left(1 - \frac{n}{m}\right)^n > 1 - \beta$$

bei beliebig kleinem β, wenn

$$m > \frac{n}{1 - \sqrt[n]{1 - \beta}}.$$

Also liegt das bei hinreichend großen n zum Ausdruck von $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ genügende Polynomium bei hinreichend großen m zwischen den Werten $\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + .. + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right)(1 - \beta)$ und $1 + x + \frac{x^2}{2} + .. + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ von beliebig kleiner Differenz.

5. Für $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ findet man bei unendlich großem m (4)

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + .. = 2{,}718\,28\,..$$

(§. 19, 3. Vergl. §. 12, 6. Gem. Arithm. §. 18) und zwar aus den $1 + n$ ersten Gliedern mit einem Fehler, der den $n$ten Teil des letzten Gliedes nicht erreicht, weil

$$\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + .. = \frac{1}{n!}\left\{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + ..\right\}$$
$$< \frac{1}{n!}\left\{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + ..\right\} < \frac{1}{n!}\frac{1}{n}$$

Dieser Wert der unendlichen Reihe ist irrational und wird nach Euler durch e bezeichnet. Wäre e der Quotient der ganzen Zahlen r und s, so fände man durch Multiplikation der Reihe mit $s!$ eine Summe von ganzen Zahlen nebst den Brüchen

$$\frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)(s+2)} + \ldots < \frac{1}{s}$$

Nun ist $(r:s)s!$ eine ganze Zahl, also vermag $r:s$ den Wert e nicht vollkommen auszudrücken.

Die Irrationalität von e und π (s. unten 10), sowie von e^x bei rationalem x wurde zuerst von Lambert 1761 bewiesen (Beiträge II, 1 p. 159. Vergl. Legendre Géom. Note 4). Der hier gegebene einfache Beweis für die Irrationalität von e ist von Fourier geführt worden (Stainville Mélanges d'anal. 1815 p. 339). Weiter hat Hermite bewiesen, daß e überhaupt nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung mit ganzen Coefficienten ist. Sur la fonction exponentielle 1874. Comptes rendus 1873 t. 77. Crelle J. 76 p. 342. Dasselbe gilt von π, wie Lindemann gezeigt hat. Berliner Sitzungsberichte 1882 p. 679. Math. Annalen 20 p. 213. 22 p. 212.

6. I. Die bei endlichen x absolut konvergente Potenzreihe von x

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

hat bei realen x den positiven Wert e^x, so daß $e^x e^y = e^{x+y}$, und heißt die Exponentialreihe von x, nachdem eine von ihrem Exponenten abhängige Potenz eine Exponentialgröße (Funktion des Exponenten, Exponentialfunktion) genannt worden war. Man erhält bei positivem μ

$$\left[\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^{\mu}\right]^{x} = \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^{\mu x} = \left(1 + \frac{x}{m}\right)^{m}$$

und durch Vertauschung von x mit $-x$

$$\left[\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^{\mu}\right]^{-x} = \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^{-\mu x} = \left(1 + \frac{-x}{m_1}\right)^{m}$$

Bei unendlichem μ wird m unendlich, folglich (4 und 5)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Ferner ist

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^{m}\left(1 + \frac{y}{m}\right)^{m} = \left(1 + \frac{z}{m}\right)^{m}, \quad z = x + y + \frac{xy}{m}$$

Bei unendlichem m verschwindet $\frac{xy}{m}$, also hat man

$$e^x e^y = e^{x+y}$$

II. Bei einem endlichen aber nicht auf ein reales Gebiet beschränkten Exponenten x wird die Potenz e^x durch die Exponentialreihe von x eindeutig definiert, so daß wiederum $e^x e^y = e^{x+y}$ sich ergiebt. Das Produkt der absolut konvergenten Exponentialreihen von x und von y ist unabhängig von der Ordnung der Glieder (2), also ist

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ..\right)\left(1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3!} + ..\right)$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ..$$
$$+ y + xy + \frac{x^2}{2}y + ..$$
$$+ \frac{y^2}{2} + x\frac{y^2}{2} + ..$$
$$+ \frac{y^3}{3!} + ..$$
$$+ ..$$
$$= 1 + (x + y) + \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x+y)^3}{3!} + ..$$

weil $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ und demnach

$$\frac{(x+y)^n}{n!} = \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\frac{y}{1} + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\frac{y^2}{2!} + ..$$

III. Bezeichnet man nun den Wert der unendlichen Reihe, welcher dem Wert x entspricht, durch $f(x)$, so ist $f(x)f(y) = f(x+y)$, folglich $[f(x)]^2 = f(2x)$, $[f(x)]^3 = f(2x)f(x) = f(3x)$, $[f(x)]^m = f(mx)$, wenn m eine positive ganze Zahl ist. Ferner

$$[f(x)]^{\frac{1}{m}} = f\left(\frac{x}{m}\right), \text{ weil } \left[f\left(\frac{x}{m}\right)\right]^m = f\left(\frac{x}{m}m\right) = f(x)$$

$$[f(x)]^{\frac{2}{m}} = f\left(\frac{2x}{m}\right), \text{ u. s. w.}$$

Und wenn α eine reale positive Zahl ist, so hat man

$$[f(x)]^{-\alpha} = 1 : [f(x)]^{\alpha} = 1 : f(\alpha x) = f(-\alpha x)$$

weil $f(\alpha x)f(-\alpha x) = f(0) = 1$.

Also ist $f(x) = [f(1)]^x = e^x$ bei realem x, wie oben.

Die Exponentialreihe ist zuerst von Newton aufgestellt worden. Vergl. Oldenburg an Leibniz 1675 April 12 und 1676 Juli 26. Potenzen in ihrer Abhängigkeit von dem Exponenten wurden von Joh. Bernoulli unter dem ihm von Leibniz vorgeschlagenen Namen Exponentialgrößen in Betracht gezogen (Opp. I p. 179).

Nachdem Joh. Bernoulli (Mém. de Paris 1702 p. 289. Opp. I n° 70 u. 89) den Zusammenhang zwischen den Differentialen imaginärer Logarithmen und realer Kreisbogen erkannt hatte, wurden von Euler 1748 die imaginären Exponenten eingeführt. Introd. I §. 138. Brief an Goldbach 1741 Dec. 9. Das Produkt von zwei Exponentialreihen ist von Stainville 1819 Gerg. Ann. 9 p. 229 gebildet worden.

7. Die komplexe Zahl $\cos x + i\sin x$, deren Modul 1 ist, wird mit einer realen Zahl α potenziert, indem man x mit derselben multipliciert

$$(\cos x + i\sin x)^\alpha = \cos\alpha x + i\sin\alpha x$$

Beweis. Nach Trigon. §. 4 ist $(\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y)$

$$= \cos x\cos y - \sin x\sin y + i(\cos x\sin y + \sin x\cos y)$$
$$= \cos(x+y) + i\sin(x+y)$$

ferner $(\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y)(\cos z + i\sin z)$

$$= \cos(x+y+z) + i\sin(x+y+z)$$

u. s. w., also bei positiven ganzen m

$$(\cos x + i\sin x)^m = \cos mx + i\sin mx$$

Ferner ist bei positiven ganzen n

$$(\cos x + i\sin x)^{\frac{n}{m}} = \cos\frac{nx}{m} + i\sin\frac{nx}{m}$$

weil $\left(\cos\frac{nx}{m} + i\sin\frac{nx}{m}\right)^m = \cos nx + i\sin nx = (\cos x + i\sin x)^n$.

Und wenn β eine positive reale Zahl ist, so hat man

$$(\cos x + i\sin x)^{-\beta} = 1 : (\cos x + i\sin x)^\beta = 1 : (\cos\beta x + i\sin\beta x)$$
$$= \cos(-\beta x) + i\sin(-\beta x)$$

weil $[\cos(-\beta x) + i\sin(-\beta x)][\cos\beta x + i\sin\beta x] = \cos 0 + i\sin 0 = 1$.

Anmerkung. Ebenso ist $(\cos x - i\sin x)^\alpha = \cos\alpha x - i\sin\alpha x$, folglich

$$2\cos\alpha x = (\cos x + i\sin x)^\alpha + (\cos x - i\sin x)^\alpha$$
$$2i\sin\alpha x = (\cos x + i\sin x)^\alpha - (\cos x - i\sin x)^\alpha$$

Hiernach sind die Quotienten

$$\frac{\cos\alpha x}{\cos^\alpha x} \text{ und } \frac{\sin\alpha x}{\cos^\alpha x}$$

Potenzreihen von $\tan x$, und $\tan\alpha x$ ist der Quotient solcher Potenzreihen.

Die Berechnung von $\cos mx$ und $\sin mx$ aus $\cos x$ oder $\sin x$ ist von Vieta (Logist. spec.) begonnen, von Jac. Bernoulli (Mém. de Paris 1702 Opp. II n° 97) vollendet worden. Vergl. Klügel math. W. 2 p. 613. Die angegebenen scheinbar imaginären Ausdrücke von $\cos mx$ und $\sin mx$ sind es, welche bei Moivre

Miscell. anal. 1730 p. 1 vorkommen. Die Potenzierung der Komplexen $\cos x + i \sin x$ durch Multiplikation des Arcus, der Inhalt des sogenannten „Moivreschen Satzes", ist von Moivre nicht in Betracht gezogen, sondern von Euler Introd. I c. 8 und 14 gegeben worden.

8. Wenn x der Arcus eines Winkels ist, d. h. der um den Scheitel als Centrum mit der Längeneinheit als Radius dem Winkel eingeschriebene Kreisbogen (das Verhältnis des Winkels zu dem πten Teil von 180^0, Trigon. §. 3, 10) so hat man*)

$$\cos x + i \sin x = e^{ix} \qquad \cos x - i \sin x = e^{-ix}$$

$$\cos x = \tfrac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

Beweis. Wenn ω der Arcus eines spitzen Winkels ist, so ist

$$\sin\omega < \omega < \operatorname{tang}\omega$$

folglich $\omega \cos\omega < \sin\omega$, also

$$\cos\omega < \frac{\sin\omega}{\omega} < 1, \quad 1 - \frac{\sin\omega}{\omega} < 1 - \cos\omega$$

Daher ist

$$\alpha = 1 - \frac{\sin\omega}{\omega} < 1 - \cos\omega$$

positiv und bei hinreichend kleinem ω beliebig klein. Hieraus folgt, daß

$$\beta = \frac{1 - \cos\omega}{\omega} = \frac{\sin^2\omega}{\omega(1 + \cos\omega)} = \frac{(1-\alpha)^2\omega}{1 + \cos\omega}$$

positiv und bei hinreichend kleinem ω beliebig klein. Nun ist (7)

$$\cos x + i \sin x = \left(\cos\frac{x}{m} + i \sin\frac{x}{m}\right)^m$$

also nach der Substitution

$$\cos\frac{x}{m} = 1 - \frac{x}{m}\beta, \quad \sin\frac{x}{m} = \frac{x}{m}(1 - \alpha)$$

$$\cos x + i \sin x = \left[1 + \frac{ix}{m}\left(1 - \alpha + i\beta\right)\right]^m$$

Bei unendlichem m verschwinden α und β, und es bleibt für $\cos x + i \sin x$ der Ausdruck e^{ix} (4), die bei endlichen ix absolut konvergente Exponentialreihe von ix. U. s. w.

*) Die trigonometrischen Funktionen $\cos x$ und $\sin x$ wurden zuerst von Newton a. a. O. (6) durch Potenzreihen von x ausgedrückt. Euler a. a. O. (7) hat die trigonometrischen Funktionen auf Exponentialreihen zurückgeführt.

9. I. Cosinus und Sinus einer komplexen Zahl x werden durch die bei realem x gefundenen Ausdrücke (8) definiert. Vergl. Euler Mém. de Berlin 1749 p. 278. Man findet

$$\cos 0 = 1,\quad \sin 0 = 0,\quad \cos(-x) = \cos x,\quad \sin(-x) = -\sin x$$
$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = (\cos x + i\sin x)(\cos x - i\sin x) = e^{ix}e^{-ix} = 1$$
$$\frac{1-\cos x}{x} \text{ und } \frac{x-\sin x}{x}$$

beliebig klein bei hinreichend kleinem x. Aus den Identitäten

$$(e^{\alpha}+e^{-\alpha})(e^{\beta}+e^{-\beta}) + (e^{\alpha}-e^{-\alpha})(e^{\beta}-e^{-\beta}) = 2(e^{\alpha+\beta}+e^{-\alpha-\beta})$$
$$(e^{\alpha}-e^{-\alpha})(e^{\beta}+e^{-\beta}) + (e^{\alpha}+e^{-\alpha})(e^{\beta}-e^{-\beta}) = 2(e^{\alpha+\beta}-e^{-\alpha-\beta})$$

erkennt man, daß auch bei komplexen x, y

$$\cos x\cos y - \sin x\sin y = \cos(x+y)$$
$$\sin x\cos y + \cos x\sin y = \sin(x+y)$$

also bei realen u, v

$$\cos iv = \tfrac{1}{2}(e^{v}+e^{-v}) \qquad \sin iv = \tfrac{1}{2}i(e^{v}-e^{-v})$$
$$\cos(u+iv) = \cos u\cos iv - \sin u\sin iv$$
$$= \tfrac{1}{2}(e^{v}+e^{-v})\cos u - \tfrac{1}{2}i(e^{v}-e^{-v})\sin u, \text{ u. s. w.}$$

Durch Potenzierung und durch Division entwickelt man

$$(2\cos x)^m \qquad (2i\sin x)^m$$
$$\frac{\sin mx}{\sin x} \qquad \frac{\sin 2mx}{\cos x} \qquad \frac{\cos(2m+1)x}{\cos x}$$

wenn m eine positive ganze Zahl ist.

II. Die realen Ausdrücke $\cos iv$ und $-i\sin iv$ sind unter den von Riccati herrührenden Namen hyperbolischer Cosinus und Sinus von v betrachtet worden, namentlich von Lambert (Mém. de Berlin 1768 p. 330) und von Gudermann (Crelle J. Bd. 6 ff. Theorie der Potentialfunktionen, Berlin 1833). Tabellen derselben hat Gronau 1863 neu herausgegeben. Vergl. Houël Nouv. Ann. 1864 p. 1.

Nach Analogie der Zerlegung von e^{-x} in den hyperbolischen Cosinus und Sinus von x

$$e^{-x} = \cos ix + i\sin ix = \operatorname{Coh} x - \operatorname{Sih} x$$

hat man, unter der Voraussetzung, daß α eine eigentliche $m$te Wurzel von 1 ist, die Glieder der Exponentialreihe in m Reihen verteilt

$$e^{\alpha x} = \varphi_0(x) + \alpha\varphi_1(x) + \alpha^2\varphi_2(x) + \ldots + \alpha^{m-1}\varphi_{m-1}(x)$$

welche mit Cosinus und Sinus gewisse Eigenschaften gemein haben. Vergl. Olivier Crelle J. 2 p. 243. Hellwig Grunert Archiv 21 p. 43. Appell Comptes rend. 1877^a p. 540 und 1378.

10. Während x den realen Weg von 1 bis 2 zurücklegt, ist $\sin x$ positiv, aber $\cos x$ geht real endlich bleibend aus dem Positiven ins Negative:

$$\cos 1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4!}\left(1 - \frac{1}{5 \cdot 6}\right) + \ldots > 0$$

$$\cos 2 = -\frac{1}{3} - \frac{2^6}{6!}\left(1 - \frac{2^2}{7 \cdot 8}\right) - \ldots < 0$$

also giebt es zwischen 1 und 2 einen realen Wert x, bei welchem $\cos x$ null ist. Dieser Wert wird durch die üblichen Annäherungsmethoden $= 1{,}570\ldots$ gefunden (Algebra §. 8) und durch $\frac{1}{2}\pi$ bezeichnet (Euler Introd. I §. 126), so daß (9)

$$\cos\tfrac{1}{2}\pi = 0, \quad \sin\tfrac{1}{2}\pi = 1$$

$$e^{i \cdot \frac{1}{2}\pi} = \cos\tfrac{1}{2}\pi + i\sin\tfrac{1}{2}\pi = i, \quad e^{i \cdot 2\pi} = 1$$

$$e^{x + i \cdot 2\pi} = e^x e^{i \cdot 2\pi} = e^x$$

$$\begin{array}{ll} \cos(x + \frac{1}{2}\pi) = -\sin x & \sin(x + \frac{1}{2}\pi) = \cos x \\ \cos(x + \pi) = -\cos x & \sin(x + \pi) = -\sin x \\ \cos(x + \frac{3}{2}\pi) = \sin x & \sin(x + \frac{3}{2}\pi) = -\cos x \\ \cos(x + 2\pi) = \cos x & \sin(x + 2\pi) = \sin x \end{array}$$

Demnach sind e^x sowie $\cos x$ und $\sin x$ periodisch, d. h. sie bleiben unverändert, jene, wenn x um $i \cdot 2\pi$, diese, wenn x um 2π verändert wird.

Bei endlichen x hat e^x endliche Werte außer 0. Denn bei endlichen a, b hat man

$$e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$$

Nun ist e^a positiv, $\cos b$ und $\sin b$ haben reale Werte zwischen -1 und 1, die nicht beide zugleich null sind; folglich ist e^{a+ib} nicht null.

Anmerkung. Der kleinste positive Winkel, dessen Cosinus null ist, ist recht, der ihm concentrisch eingeschriebene Kreisbogen beträgt den 4ten Teil der Kreisperipherie. Also ist $\frac{1}{2}\pi$ das Verhältnis des 4ten Teils der Peripherie zum Radius des Kreises, π das Verhältnis der Peripherie zum Diameter (Ludolphsche Zahl, numerus Ceulenius. Planim. §. 13).

11. Zwei reale Zahlen a und b werden durch eine positive Zahl r und den Arcus φ eines Winkels ausgedrückt

$$a = r\cos\varphi \qquad b = r\sin\varphi$$

unter den Bedingungen

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{b}{a} \qquad r = \frac{a}{\cos\varphi} = \frac{b}{\sin\varphi} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Wenn a und b positiv sind, so findet man φ zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$. Wenn a negativ, b positiv, so findet man φ zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und π, nachdem man $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ durch $-\sin(\varphi - \frac{1}{2}\pi)$ und $\cos(\varphi - \frac{1}{2}\pi)$ ersetzt hat. U. s. w.

Demnach wird, wenn auf der Zahlen-Ebene die Zahlen 0, 1, $a + ib$ die Punkte O, E, P haben (§. 16, 10), die Zahl $a + ib$ durch ihren Modul $r = |a + ib| = OP$ und ihren Arcus φ d. h. den Arcus des Winkels EOP ausgedrückt:

$$a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$$

$$\operatorname{arc}(a + ib) = \operatorname{arc}\operatorname{tang}\frac{b}{a} \qquad \operatorname{mod}(a + ib) = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Positive reale Zahlen haben den Arcus 0, positive imaginäre Zahlen haben den Arcus $\frac{1}{2}\pi$, negative reale Zahlen haben den Arcus π, negative imaginäre Zahlen haben den Arcus $\frac{3}{2}\pi$, die Arcus von konjugierten Zahlen haben die Summe 2π. Die Zahl bleibt unverändert, wenn ihr Arcus um 2π verändert wird. Der Arcus eines Produkts ist die Summe der Arcus der Faktoren (7). Der Arcus eines Quotienten ist die Differenz der Arcus des Dividenden und des Divisor. Der Arcus einer $n$ten Potenz ist der $n$fache Arcus des Dignandus. Zwei Zahlen können nicht gleich sein, ohne daß ihre Moduln gleich und ihre Arcus gleich oder um ganzmal 2π verschieden sind.

12. Wenn die Zahlen a, b, .. die Punkte A, B, .. haben, und $p = b - a$ ist, so ist das Viereck $OABP$ ein Parallelogramm, weil OP und AB von gleicher Größe und Richtung sind als Hypotenusen von Katheten gleicher Größe und Richtung. Also ist

$$\operatorname{mod}(b - a) = AB \qquad \operatorname{arc}(b - a) = \operatorname{arc} OE\hat{}AB$$

Wenn $q = a + b$, so ist $q - a = b$, AQ mit OB von gleicher Größe und Richtung, OQ die geometrische Summe der Strecken OA und OB*). Der Punkt Q der Summe wird gefunden, indem man der Strecke OA die mit OB gleiche und gleichgerichtete Strecke AQ ansetzt. Überhaupt wenn α, β, .. reale Zahlen sind, so ist der Punkt der Formel

*) Möbius Mechanik des Himmels 1843.

$$\frac{\alpha a + \beta b + \ldots}{\alpha + \beta + \ldots}$$

der Schwerpunkt der Punkte $\alpha \,.\, A$, $\beta \,.\, B$, ...

Die Summe konjugierter Zahlen a und a' ist real, ihre Differenz imaginär:

$$a + a' = 2 \operatorname{mod} a \,.\, \cos \operatorname{arc} a$$
$$a - a' = 2 \operatorname{mod} a \,.\, \sin \operatorname{arc} a$$

Wenn $p = b : a$, so ist $OP : OE = OB : OA$ und $EOP = EOB - EOA = AOB$, also sind die Dreiecke OEP und OAB ähnlich und eines Sinnes.

Wenn $q = ab$, so ist $q : a = b$, $OAQ \sim OEB$.
Wenn $a : b = c : d$, so ist $OAB \sim OCD$.

Wenn $p = \frac{b-a}{c-a}$, so ist $OEP \sim ACB$.

Wenn $\frac{q-p}{r-p} = \frac{b-a}{c-a}$, so ist $PQR \sim ABC$.

Die Formel $(a, b, c, d) = \frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d}$ hat den Modul $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ und den Arcus des Winkels $BCA - BDA$.

Der Modul und der Arcus von $\sqrt[n]{ab\ldots}$ sind das geometrische Mittel der Moduln und das arithmetische Mittel der Arcus von $a, b, \ldots$

Wenn a und a', b und b' konjugiert sind, so ist $aa' = OA^2$, $(a-b)(a'-b') = AB^2$. Das Produkt ab' hat den Modul $OA \,.\, OB$ und den Arcus des Winkels BOA, folglich ist

$$ab' + a'b = 2OA \,.\, OB \cos BOA$$
$$ab' - a'b = 2i \,.\, OA \,.\, OB \sin BOA = -4i \,.\, OAB$$

13. Auf Grund der gezeigten Transformation (11) werden Potenzen, Wurzeln, Logarithmen u. s. w. von $a + ib$ berechnet (D'Alembert sur les vents art. 78 und Mém. de Berlin 1746 p. 192, Euler Mém. de Berlin 1749 p. 265 ff.). Wenn n real, positiv, ganz ist, so hat man

$$(a + ib)^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi}$$

$$\sqrt[n]{a + ib} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$$

$$\log(a + ib) = \log r + i(\varphi + 2k\pi) \text{ für die Basis } e$$

$$\log\frac{z}{\operatorname{mod} z} = i \operatorname{arc} z$$

wobei $r^{\frac{1}{n}}$ positiv real, $\log r$ real, und $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Wenn man k um n verändert, so bleibt die zweite Formel unverändert (10), also findet man nicht mehr als n verschiedene Werte der $n$ten Wurzel. Der natürliche Logarithmus einer Zahl, deren Modul 1, ist der mit der imaginären Einheit multiplicierte Arcus der Zahl: die Arcus der Zahlen haben die Eigenschaften der Logarithmen der Zahlen (11).

$$\text{Insbesondere ist } \sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \text{ und } \log 1 = i \,.\, 2k\pi.$$

Z. B. $\sqrt[6]{1}$ hat die Werte

$$1,\ \cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3},\ \cos\frac{2\pi}{3} \pm i\sin\frac{2\pi}{3},\ \cos\pi \pm i\sin\pi = -1$$

$\sqrt[7]{1}$ hat die Werte

$$1,\ \cos\frac{2\pi}{7} \pm i\sin\frac{2\pi}{7},\ \cos\frac{4\pi}{7} \pm i\sin\frac{4\pi}{7},\ \cos\frac{6\pi}{7} \pm i\sin\frac{6\pi}{7}$$

Um die Zahl zu berechnen, deren Cosinus den Wert $a + ib$ hat, sucht man die realen u, v, welche der Gleichung $\cos(u + iv) = a + ib$ genügen. Dieselben genügen den Gleichungen (9)

$$\tfrac{1}{2}(e^{-v} + e^{v})\cos u = a \qquad e^{-v} = \frac{a}{\cos u} + \frac{b}{\sin u}$$

$$\tfrac{1}{2}(e^{-v} - e^{v})\sin u = b \qquad e^{v} = \frac{a}{\cos u} - \frac{b}{\sin u}$$

$$1 = \left(\frac{a}{\cos u}\right)^2 - \left(\frac{b}{\sin u}\right)^2$$

Hieraus findet man einen positiven Wert für $2\sin^2 x$ und für $2\cos^2 x$; endlich einen $\cos x$, der das Zeichen von a hat, und ein reales y.

§. 32. Die Binomialreihe und die Logarithmenreihe.

1. I. Die Reihe $1 + \binom{x}{1}h + \binom{x}{2}h^2 + \ldots$ ist eine Potenzreihe von h, deren Coefficienten figurierte Zahlen sind, welche von x abhängen. Wenn x eine reale positive ganze Zahl ist, so hat die Reihe $1 + x$ Glieder, und ist die Entwickelung der Potenz $(1 + h)^x$. Vergl.

§. 23. Bei andern x hat die Reihe eine unendliche Fortsetzung, und ist konvergent, wenn h und x bestimmten Gebieten angehören*).

Der Quotient succeſſiver Glieder ist ($k = 1, 2, \ldots$)

$$\binom{x}{k}h^k : \binom{x}{k-1}h^{k-1} = \frac{x-k+1}{k}h$$

Der absolute Wert von $\binom{x}{k}$ wird durch x_k bezeichnet, so daß

$$\frac{x_k}{x_{k-1}} = \left|\frac{x-k+1}{k}\right| = \left|\frac{x+1}{k} - 1\right|$$

Wenn $|h| < 1$, z. B. $|h| = 1 - \delta$, so ist bei endlichen x und hinreichend großen k

$$\left|\frac{x+1}{k}\right| < \delta, \quad \left|\frac{x+1}{k} - 1\right| < 1 + \delta$$

$$\frac{x_k}{x_{k-1}}|h| < (1+\delta)(1-\delta) < 1 - \delta^2 < 1$$

Hieraus folgt (§. 31, 1. VI), daß bei $|h| < 1$ und endlichen x die Reihe absolut konvergent ist.

II. Wenn $x = a + ib$, so ist

$$\frac{x_k}{x_{k-1}} = \frac{|a + ib - k + 1|}{k}$$

Nun ist $|a + ib - k + 1|^2 = (k - 1 - a)^2 + b^2$

$$= (k - 1 - a + c)^2 - 2c(k - 1 - a) - c^2 + b^2$$

Bei einem gegebenen positiven c und bei hinreichend groß gewählten k wird $2c(k - 1 - a) + c^2 - b^2$ positiv, nämlich bei

$$k > 1 + a + \frac{b^2 - c^2}{2c}$$

und man hat bei solchen c, k

$$|a + ib - k + 1|^2 < (k - 1 - a + c)^2$$

$$\frac{x_k}{x_{k-1}} < \frac{k - 1 - a + c}{k}$$

$$\frac{x_k}{x_{k-1}} < 1 - \frac{\alpha}{k}, \text{ wo } \alpha = 1 + a - c < 1 + a$$

*) Abel über die Binomialreihe 1826 (Crelle J. 1 p. 311 ff., Oeuvres t. 1) hat zuerst diese Gebiete bestimmt. In dieser Abhandlung sind insbesondere die Beweisgründe II, III, V enthalten.

III. Bei positiven ganzen r, s ist (§. 12, 6)

$$1+\frac{1}{k}<\left(1+\frac{1}{sk}\right)^s$$

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{s}}<1+\frac{1}{sk}<\frac{1}{1-\frac{1}{sk}}$$

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{r}{s}}<\frac{1}{\left(1-\frac{1}{sk}\right)^r}<\frac{1}{1-\frac{r}{sk}}$$

Das letztere folgt daraus, daß $\left(1-\frac{1}{sk}\right)^r>1-\frac{r}{sk}$. Daher ist

$$1-\frac{r}{sk}<\left(\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\right)^{\frac{r}{s}}$$

also bei positiven α und hinreichend großen k

$$\frac{x_k}{x_{k-1}}<1-\frac{\alpha}{k}<\left(\frac{k}{k+1}\right)^\alpha$$

$$\frac{x_{k+1}}{x_k}<\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^\alpha,\quad \frac{x_{k+1}}{x_{k-1}}<\left(\frac{k}{k+2}\right)^\alpha$$

$$\frac{x_{k+r}}{x_{k-1}}<\left(\frac{k}{k+r+1}\right)^\alpha$$

Der letzte Quotient ist beliebig klein bei hinreichend großen $k+r$. Wenn $1+\alpha$ positiv ist, so kann α positiv gemacht werden (II). Wenn daher x endlich und sein realer Teil $a>-1$, so bilden bei hinreichend großem k die absoluten Werte der $\binom{x}{k}$, $\binom{x}{k+1}$, $\binom{x}{k+2}$, .. eine bis 0 fallende Reihe.

IV. Bei positiven α und hinreichend großen k ist

$$x_k<x_{k-1}\left(\frac{k}{k+1}\right)^\alpha,\quad x_{k+1}<x_{k-1}\left(\frac{k}{k+2}\right)^\alpha,\ ..$$

$$x_k+x_{k+1}+..<x_{k-1}k^\alpha\left\{\frac{1}{(k+1)^\alpha}+\frac{1}{(k+2)^\alpha}+..\right\}$$

Die eingeschlossene Reihe ist beliebig klein unter der Bedingung $\alpha>1$ (§. 31, 1. III), welcher bei positiven a genügt werden kann. Dabei wird die Fortsetzung $x_k+x_{k+1}+..$ beliebig klein. Wenn daher $|h|=1$,

x endlich und sein realer Teil a positiv, so ist die Reihe $1 + \binom{x}{1}h + \binom{x}{2}h^2 + \ldots$ absolut konvergent.

V. Wenn $|h| = 1$, aber h nicht -1, so ist die Reihe

$$R = 1 + \binom{x}{1}h + \binom{x}{2}h^2 + \ldots$$

absolut konvergent nicht nur bei endlichen x, deren reale Teile positiv sind, sondern auch bei endlichen x, deren reale Teile > -1 sind. Es sei $x = a + ib$, $a > -1$, dann ist $a + 1$ positiv, mithin bei $|h| = 1$ die Reihe

$$S = 1 + \binom{x+1}{1}h + \binom{x+1}{2}h^2 + \ldots$$

absolut konvergent (IV). Nun ist (§. 23, 3)

$$\binom{x+1}{k} = \binom{x}{k} + \binom{x}{k-1}$$

folglich

$$\begin{aligned} S &= 1 + \binom{x}{1}h + \binom{x}{2}h^2 + \binom{x}{3}h^3 + \ldots \\ &\quad + h + \binom{x}{1}h^2 + \binom{x}{2}h^3 + \ldots \\ &= R + hR = (1+h)R \end{aligned}$$

Demnach hat R unter der Bedingung, daß $1 + h$ nicht null ist, den endlichen Wert $\frac{S}{1+h}$.

2. Bei endlichen x, y und positiven ganzen k ist*)

$$\binom{x}{k} + \binom{x}{k-1}\binom{y}{1} + \binom{x}{k-2}\binom{y}{2} + \ldots + \binom{x}{1}\binom{y}{k-1} + \binom{y}{k} = \binom{x+y}{k}$$

Beweis. Die bei realen positiven ganzen x, y geltende Gleichung (§. 25, 5) ist für x vom $k$ten Grade. Derselben genügen aber mehr als k Werte x, also ist sie eine Identität und gültig bei beliebigen x, y (Algebra §. 10, 3).

*) Euler. Vergl. §. 23.

In der That ist die gegebene Reihe die Summe der beiden Reihen

$$\binom{x}{k} + \binom{x}{k-1}\binom{y}{1}\frac{k-1}{k} + \binom{x}{k-2}\binom{y}{2}\frac{k-2}{k} + \ldots$$

$$+ \binom{x}{k-1}\binom{y}{1}\frac{1}{k} \qquad + \binom{x}{k-2}\binom{y}{2}\frac{2}{k} \qquad + \ldots$$

und zufolge der Identität $\binom{x}{r} = \binom{x}{r-1}\frac{x-r+1}{r}$ gleich der Summe

$$\binom{x}{k-1}\frac{x-k+1}{k} + \binom{x}{k-2}\binom{y}{1}\frac{x-k+2}{k-1}\cdot\frac{k-1}{k} + \binom{x}{k-3}\binom{y}{2}\frac{x-k+3}{k-2}\cdot\frac{k-2}{k} + \ldots$$

$$+\binom{x}{k-1}\frac{y}{k} \qquad + \binom{x}{k-2}\binom{y}{1}\frac{y-1}{2}\cdot\frac{2}{k} \qquad + \binom{x}{k-3}\binom{y}{2}\frac{y-2}{3}\cdot\frac{3}{k} \qquad + \ldots$$

folglich gleich

$$\frac{x+y-k+1}{k}\left\{\binom{x}{k-1} + \binom{x}{k-2}\binom{y}{1} + \binom{x}{k-3}\binom{y}{2} + \ldots\right\}$$

Wenn nun der dem Wert k entsprechende Wert der gegebenen Reihe durch $f(k)$ bezeichnet wird, so hat man

$$f(k) = \frac{x+y-k+1}{k} f(k-1), f(k-1) = \frac{x+y-k+2}{k-1} f(k-2), \ldots, f(1) = \frac{x+y}{1}$$

$$f(k) = \frac{x+y}{1}\,\frac{x+y-1}{2}\,\ldots\,\frac{x+y-k+1}{k} = \binom{x+y}{k}$$

3. Die unendliche Reihe $1 + \binom{x}{1}h + \binom{x}{2}h^2 + \ldots$, wenn sie konvergent ist, hat den Wert $(1+h)^x$, aus welchem durch Multiplikation mit den von 1 verschiedenen Werten von 1^x die übrigen Werte von $(1+h)^x$ entspringen, und heißt die Binomialreihe*).

*) Das allgemeine Binomialtheorem, eine der ersten Entdeckungen Newtons (Brief für Leibniz 1676 Juni 13). Vergl. Euler Nov. Comm. Petrop. 19 p. 103 nebst den §. 23 citierten Stellen, und Abel a. a. O., der zuerst die Beschränkung von x auf ein reales Gebiet aufgehoben und die Reihe bei komplexen x untersucht hat.

Beweis. Durch Multiplikation findet man (wie §. 31, 6)

$$\left\{1+\binom{x}{1}h+\binom{x}{2}h^2+..\right\}\left\{1+\binom{y}{1}h+\binom{y}{2}h^2+..\right\}$$

$$\begin{aligned}
&= 1+\binom{x}{1}h+\binom{x}{2}h^2 &&+\binom{x}{3}h^3 &&+..\\
&\quad+\binom{y}{1}h+\binom{x}{1}\binom{y}{1}h^2 &&+\binom{x}{2}\binom{y}{1}h^3 &&+..\\
&\quad+\binom{y}{2}h^2 &&+\binom{x}{1}\binom{y}{2}h^3 &&+..\\
&&&+\binom{y}{3}h^3 &&+..\\
&&&&&+..\\
&= 1+\binom{x+y}{1}h+\binom{x+y}{2}h^2+\binom{x+y}{3}h^3 &&+..
\end{aligned}$$

nach (2). Wenn man den dem Wert x entsprechenden Wert der unendlichen Reihe durch $\varphi(x)$ bezeichnet, so hat man die Identität $\varphi(x)\,\varphi(y) = \varphi(x+y)$, aus der man wie oben (§. 31, 6) schließt

$$\varphi(x) = [\varphi(1)]^x = (1+h)^x$$

Die Binomialreihe dient zur Berechnung einer Wurzel von $1+h$, wenn der Modul von h ein echter Bruch und x ein realer Bruch ist. Vergl. §. 23, 6.

Wenn $x = a+ib$, so findet man (1. IV und V) bei $h=1$

$$1+\binom{x}{1}+\binom{x}{2}+.. = 2^x, \text{ wenn } a > -1$$

und bei $h=-1$

$$1-\binom{x}{1}+\binom{x}{2}-.. = 0, \text{ wenn } a > 0$$

4. Der natürliche Logarithmus (auf der Basis e) von $1+h$ wird, abgesehen von dem Glied $\log 1$ (§. 19, 4. §. 31, 13), eindeutig ausgedrückt durch

$$m(\sqrt[m]{1+h}-1)$$

bei einem hinreichend großen positiven m mit einem beliebig kleinen Fehler, daher bei $|h| \leqq 1$, ausgenommen $h=-1$, durch die Potenzreihe von h (Logarithmenreihe)

$$h - \tfrac{1}{2}h^2 + \tfrac{1}{3}h^3 - \tfrac{1}{4}h^4 + \ldots^*)$$

und nach Vertauschung von h mit $-h$ bei $|h| \leqq 1$, ausgenommen $-h = -1$ d. i. $h = 1$,

$$\log(1-h) = -h - \tfrac{1}{2}h^2 - \tfrac{1}{3}h^3 - \ldots$$

Beweis. Nach §. 31, 4—6 ist

$$\left(1 + \frac{\log(1+h)}{m}\right)^m = e^{\log(1+h)} = 1 + h$$

$$\log(1+h) = m\left(\sqrt[m]{1+h} - 1\right)$$

bei hinreichend großem m mit einem beliebig kleinen Fehler.

Bei unendlich steigendem m ist $x = 1 : m$ positiv fallend bis 0. Also (3) hat man, wenn $|h| \leqq 1$, aber $1 + h$ nicht null,

$$m\left(\sqrt[m]{1+h} - 1\right) = \frac{(1+h)^x - 1}{x}$$

$$= h - \tfrac{1}{2}h^2(1-x) + \tfrac{1}{3}h^3(1-x)(1-\tfrac{1}{2}x) - \ldots$$

Diese Reihe hat bei hinreichend kleinen x von der Reihe

$$h - \tfrac{1}{2}h^2 + \tfrac{1}{3}h^3 - \ldots$$

eine beliebig kleine Differenz (wie §. 31, 4).

Bei $h = 1$ hat man

$$\log 2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \ldots$$

eine konvergente Reihe von geringer Konvergenz (§. 31, 1. IV und 2. I). Bei dem ausgeschlossenen Wert $h = -1$ findet man für $\log 0$ die nicht konvergente Reihe $-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \ldots$ In der That wird $\log 0 = -\log\infty$, in Folge der Gleichung $\log\frac{1}{z} = -\log z$ bei steigenden z, durch eine endliche Zahl nicht ausgedrückt.

Anmerkung. Ein künstlicher Logarithmus hat zu dem natürlichen Logarithmus desselben Numerus ein nur von der Basis abhängiges Verhältnis M (§. 19, 3). Daher ist

$$\mathrm{Log}\, a = M \log a$$

$$\mathrm{Log}(a+\delta) - \mathrm{Log}\, a = \mathrm{Log}\left(1 + \frac{\delta}{a}\right) = M \log\left(1 + \frac{\delta}{a}\right)$$

$$= M\left(\frac{\delta}{a} - \tfrac{1}{2}\frac{\delta^2}{a^2} + \ldots\right)$$

*) Die Reihe wurde von Nic. Mercator (Logarithmotechnia 1668 pr. 17) und Jac. Gregory (Exercit. geom. 1668) bekannt gemacht; sie war früher von Newton gefunden worden (Brief an Leibniz 1676 Okt. 24). Die jetzt übliche Ableitung der Reihe ist von Halley Philos. Trans. 1695 und Euler Introd. I §. 119 begründet worden.

Bei hinreichend kleinem $\delta : a$ entscheidet das erste Glied der eingeschlossenen Reihe. Also ist die Logarithmendifferenz dem Verhältnis der Numerndifferenz zu dem Numerus um so genauer proportional, je geringer dieses Verhältnis ist. Vergl. §. 20, 4.

5. Aus den Reihen (4), wenn sie konvergent sind,

$$\log(1+h) = \quad h - \tfrac{1}{2}h^2 + \tfrac{1}{3}h^3 - \ldots$$
$$\log(1-h) = -h - \tfrac{1}{2}h^2 - \tfrac{1}{3}h^3 - \ldots$$

folgt durch Subtraktion

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{1+h}{1-h} = h + \tfrac{1}{3}h^3 + \tfrac{1}{5}h^5 + \ldots$$

oder nach der Substitution $\dfrac{1+h}{1-h} = a$, $|h| = \left|\dfrac{a-1}{a+1}\right| < 1$

$$\tfrac{1}{2}\log a = \frac{a-1}{a+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 + \ldots$$

insbesondere bei realen positiven ganzen m, n, $m-n$, u, v

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{m}{n} = \frac{m-n}{m+n} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3 + \ldots$$

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{u+v}{u} = \frac{v}{2u+v} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{v}{2u+v}\right)^3 + \ldots$$

Z. B. $u = 1$, $v = 1$ giebt $\log 2$. Durch Verdopplung findet man $\log 4$, und $u = 4$, $v = 1$ giebt $\log 5 - \log 4$. Daher wird $\log 10 = \log 2 + \log 5$ gefunden, und

$$1 : \log 10 = 0{,}434\,29 \ldots \text{ (§. 19, 3)}$$

Die für $\frac{1}{2}\log a$ gegebene Reihe konvergiert, wenn der reale Teil von a positiv ist. Unter der Voraussetzung $a = p + iq$ ist

$$\left|\frac{a-1}{a+1}\right|^2 = \frac{(p-1)^2+q^2}{(p+1)^2+q^2} < 1$$

wenn $(p+1)^2 > (p-1)^2$ d. h. $p > 0$. Wenn der reale Teil von a negativ ist, so hat die Zahl $-a$ einen positiven realen Teil, und es ist $\log a = \log(-1) + \log(-a)$. Vergl. §. 31, 13.

Wenn $\log a$ gefunden ist und x einem bestimmten Gebiet angehört, welches a umgiebt, so wird $\log x$ gefunden als eine absolut konvergente Potenzreihe von $x - a$. Dazu wird erfordert, daß der Punkt x von dem Nullpunkt verschieden in oder auf dem Kreis liegt, dessen Centrum der Punkt a ist und dessen Umfang den Nullpunkt enthält. Denn es ist

$$x = a\left(1 + \frac{x-a}{a}\right), \quad \log x = \log a + \log\left(1 + \frac{x-a}{a}\right)$$

Wenn $|x-a| \leqq |a|$, aber nicht $x - a = -a$ d. h. nicht $x = 0$, so ist

$$\log x = \log a + \frac{x-a}{a} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{x-a}{a}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x-a}{a}\right)^3 - \ldots$$

6. Aus den Relationen (§. 31, 8)

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

folgt durch Division

$$e^{2ix} = \frac{\cos x + i \sin x}{\cos x - i \sin x} = \frac{1 + i \operatorname{tang} x}{1 - i \operatorname{tang} x}$$

$$x = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + i \operatorname{tang} x}{1 - i \operatorname{tang} x}$$

Es ist $|i \operatorname{tang} x| = |\operatorname{tang} x|$, $\operatorname{tang}(-x) = -\operatorname{tang} x$. Wenn nun $|\operatorname{tang} x| \leqq 1$, so hat man (5) ohne Ausnahme

$$\tfrac{1}{2} \log \frac{1 + i \operatorname{tang} x}{1 - i \operatorname{tang} x} = i \operatorname{tang} x + \tfrac{1}{3}(i \operatorname{tang} x)^3 + \ldots$$

Also ist bei allen x des realen Gebietes von $-\frac{1}{4}\pi$ bis $\frac{1}{4}\pi$ ohne Ausnahme

$$x = \operatorname{tang} x - \tfrac{1}{3}(\operatorname{tang} x)^3 + \tfrac{1}{5}(\operatorname{tang} x)^5 - \ldots *)$$

An der Grenze $x = \frac{1}{4}\pi$, wo $\operatorname{tang} x = 1$, findet man die unendliche Reihe (Leibniz a. a. O. und Acta Erud. 1682)

$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \ldots$$

welche bei der gegebenen Anordnung der Glieder gegen den zwischen $\frac{2}{3}$ und 1 liegenden Wert $\frac{1}{4}\pi$ eben noch konvergiert. Vergl. §. 31, 2.

Leichtere Berechnungen der Zahl π sind von Newton a. a. O. angezeigt worden. Z. B. Aus geometrischen wie aus goniometrischen Gründen hat man $\operatorname{tang} \frac{1}{6}\pi = \sqrt{\frac{1}{3}}$, folglich

$$\tfrac{1}{6}\pi = \sqrt{\tfrac{1}{3}} - \tfrac{1}{3}\sqrt{\tfrac{1}{3}}^3 + \tfrac{1}{5}\sqrt{\tfrac{1}{3}}^5 - \ldots$$

Oder man setzt $\frac{1}{4}\pi$ aus mehreren stark konvergierenden unendlichen Reihen zusammen. Wenn $\alpha + \beta = \frac{1}{4}\pi$, so ist

$$\frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta}{1 - \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta} = 1$$

*) Jac. Gregory. Vergl. den Brief Oldenburgs an Leibniz 1675 April 12. Auch Leibniz (Brief an Oldenburg 1676 Aug. 27) und Newton (Brief an Leibniz 1676 Okt. 24) waren im Besitz dieser Reihe.

und zu $\operatorname{tang}\alpha$ ergiebt sich $\operatorname{tang}\beta$, so daß

$$\tfrac{1}{4}\pi = \operatorname{tang}\alpha - \tfrac{1}{3}(\operatorname{tang}\alpha)^3 + \ldots + \operatorname{tang}\beta - \tfrac{1}{3}(\operatorname{tang}\beta)^3 + \ldots$$

Passende Werte enthält die folgende Tabelle*)

$\frac{1}{4}\pi$	$\operatorname{tang}\alpha$	$\operatorname{tang}\beta$
$\alpha+\beta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$2\alpha+\beta$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$
$4\alpha-\beta$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{239}$
$5\alpha+2\beta$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{79}$

7. I. Bei komplexen h wird die Binomialreihe und die Logarithmenreihe transformiert**), indem man

$$h = \alpha(\cos\omega + i\sin\omega) = \alpha e^{i\omega}$$

setzt (§. 31, 11), wo α, ω reale Zahlen sind. Dann wird

$$1 + h = e^{\varrho}(\cos\psi + i\sin\psi) = e^{\varrho}e^{i\psi} = e^{\varrho+i\psi}$$

gesetzt, also

$$e^{\varrho}\cos\psi = 1 + \alpha\cos\omega,\quad e^{\varrho}\sin\psi = \alpha\sin\omega$$

Man bestimmt deshalb ψ real zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}\pi$, so daß

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\alpha\sin\omega}{1+\alpha\cos\omega}$$

und findet dann

$$e^{\varrho} = \frac{1+\alpha\cos\omega}{\cos\psi} = \frac{\alpha\sin\omega}{\sin\psi} = (1+2\alpha\cos\omega+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}$$

Nun ist $\cos\psi$ positiv, folglich e^{ϱ} positiv, ϱ eindeutig real unter der Bedingung $1+\alpha\cos\omega \geqq 0$.

II. Dann ist (1 und 2) bei realen α absolut kleiner als 1, bei realen endlichen ω und bei endlichen x

$$1 + \binom{x}{1}\alpha e^{i\omega} + \binom{x}{2}\alpha^2 e^{2i\omega} + \binom{x}{3}\alpha^3 e^{3i\omega} + \ldots$$

$$= (1+\alpha e^{i\omega})^x = e^{(\varrho+i\psi)x} = e^{p+iq}$$

und nach Zerlegung der Exponentialen (§. 31, 8)

---

*) Vergl. Klügel math. W. I p. 657. Gauß Werke II p. 501.

**) Abel a. a. O. Einige der von Abel gewonnenen Resultate waren von Cauchy Anal. algébr. c. 9, 2 gegeben worden.

$$1 + \binom{x}{1}\alpha\cos\omega + \binom{x}{2}\alpha^2\cos 2\omega + \binom{x}{3}\alpha^3\cos 3\omega + \ldots = e^p\cos q$$

$$1 + \binom{x}{1}\alpha\sin\omega + \binom{x}{2}\alpha^2\sin 2\omega + \binom{x}{3}\alpha^3\sin 3\omega + \ldots = e^p\sin q$$

Wenn $\alpha^2 = 1$, ω real endlich, x endlich aber mit einem positiven realen Teil, so hat man nach entsprechender Bestimmung von ϱ, ψ, p, q ebenfalls

$$1 + \binom{x}{1}\alpha e^{i\omega} + \binom{x}{2}\alpha^2 e^{2i\omega} + \ldots = e^{p+iq}$$

III. Wenn α, ω real sind, und einer der 3 Fälle stattfindet,

$\alpha^2 < 1$, ω endlich ohne Ausnahme,
$\alpha = 1$, ω endlich mit Ausnahme der ungeraden Vielfachen von π und $-\pi$, deren Cosinus -1 sind,
$\alpha = -1$, ω endlich mit Ausnahme der geraden Vielfachen von π und $-\pi$, deren Cosinus 1 sind,

so hat man (4)

$$\alpha e^{i\omega} - \tfrac{1}{2}\alpha^2 e^{2i\omega} + \tfrac{1}{3}\alpha^3 e^{3i\omega} - \ldots = \varrho + i\psi$$

und durch Zerlegung

$$\alpha\cos\omega - \tfrac{1}{2}\alpha^2\cos 2\omega + \tfrac{1}{3}\alpha^3\cos 3\omega - \ldots = \varrho$$
$$\alpha\sin\omega - \tfrac{1}{2}\alpha^2\sin 2\omega + \tfrac{1}{3}\alpha^3\sin 3\omega - \ldots = \psi$$

IV. Bei einem zulässigen ω erhält man ein Paar Potenzreihen von α, welche bei realen α des Gebietes $-1 \ldots 1$ konvergent sind, und deren Werte von α abhängige Logarithmen oder Arcus sind. Z. B. bei $\omega = \frac{1}{2}\pi$ ist $\sin\omega = 1$, $\sin 2\omega = 0$, $\sin 3\omega = -1$, $\sin 4\omega = 0$, .., ferner $\operatorname{tang}\psi = \alpha$. Bei realen α des Gebietes $-1 \ldots 1$ bedeutet die Potenzreihe von α

$$\alpha - \tfrac{1}{3}\alpha^3 + \tfrac{1}{5}\alpha^5 - \ldots$$

den Arcus des Gebietes $-\frac{1}{2}\pi \ldots \frac{1}{2}\pi$, dessen Tangente α ist (6).

Bei einem zulässigen α erhält man ein Paar trigonometrische Reihen von ω, welche bei realen endlichen ω ohne Ausnahme oder mit bestimmten Ausnahmen konvergent sind, und deren Werte von ω abhängige Logarithmen oder Arcus sind. Z. B. bei $\alpha = 1$ sind $\omega = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$ ausgeschlossen; also kommen die trigonometrischen Reihen von ω

$$\cos\omega - \tfrac{1}{2}\cos 2\omega + \tfrac{1}{3}\cos 3\omega - \ldots = \varrho$$
$$\sin\omega - \tfrac{1}{2}\sin 2\omega + \tfrac{1}{3}\sin 3\omega - \ldots = \psi$$

in den Gebietsteilen $-\pi \ldots \pi$, $\pi \ldots 3\pi$, .. in Betracht. In dem Gebietsteil $-\pi \ldots \pi$ ist (I)

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\sin\omega}{1+\cos\omega} = \operatorname{tang}\frac{1}{\omega}, \quad \psi = \tfrac{1}{2}\omega$$

$$e^{\iota} = \frac{1+\cos\omega}{\cos\psi} = 2\cos\tfrac{1}{2}\omega$$

folglich hat man für ω des Gebietes $-\pi \,..\, \pi$

$$\cos\omega - \tfrac{1}{2}\cos 2\omega + \tfrac{1}{3}\cos 3\omega - \,.. = \log(2\cos\tfrac{1}{2}\omega)$$
$$\sin\omega - \tfrac{1}{2}\sin 2\omega + \tfrac{1}{3}\sin 3\omega - \,.. = \tfrac{1}{2}\omega$$

In dem folgenden Gebietsteil $\pi \,..\, 3\pi$ ist $\omega = \pi + \varphi$, wo φ in dem Gebiet $0 \,..\, 2\pi$ liegt. Hier wird

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{-\sin\varphi}{1-\cos\varphi} = -\cot\tfrac{1}{2}\varphi = -\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\pi-\varphi)$$

$$\psi = -\tfrac{1}{2}(\pi-\varphi) = -\tfrac{1}{2}(2\pi-\omega)$$

$$e^{\iota} = \frac{1-\cos\varphi}{\cos\psi} = 2\sin\tfrac{1}{2}\varphi = 2\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\pi)$$

also findet man

$$\cos\omega - \tfrac{1}{2}\cos 2\omega + \tfrac{1}{3}\cos 3\omega - \,.. = \log[2\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\pi)]$$
$$\sin\omega - \tfrac{1}{2}\sin 2\omega + \tfrac{1}{3}\sin 3\omega - \,.. = -\tfrac{1}{2}(2\pi-\omega)$$

U. s. w. Wenn ω in dem ersten und in dem zweiten der durch π getrennten Gebietsteile an π sich nähert, so nähert sich die Reihe $\cos\omega - \,..$, während ihre Konvergenz verschwindet, beidemal an denselben $\log 0$. Zugleich aber nähert sich die Reihe $\sin\omega - \,..$, während ihre Konvergenz verschwindet, in dem ersten Fall an $\frac{1}{2}\pi$, in dem zweiten Fall an $-\frac{1}{2}\pi$, während die Reihe bei $\omega = \pi$ null ist.

Das Konvergenzgebiet der beiden trigonometrischen Reihen umfaßt alle realen endlichen ω mit Ausnahme von $\pm\pi$, $\pm 3\pi$, ... Bei $\omega = \pm\pi, \pm 3\pi, \,..$ werden die Reihen durch $\log 0$ die eine, durch 0 die andre ausgedrückt. Aber in hinreichend naher Umgebung von $\pm\pi$, $\pm 3\pi, \,..$ haben beide Reihen beliebig kleine Konvergenz, und die Reihe $\sin\omega - \,..$ hat bei $\omega = \pi - \delta$, $\pi + \delta$ für beliebig kleine δ Werte, deren Differenzen nicht beliebig klein sind. Die beiden Reihen können nicht in ihrem Konvergenzgebiet bei einer vorgeschriebenen Fehlergrenze durch eine endliche Anzahl ihrer Glieder ausgedrückt werden, weil das Konvergenzgebiet die angezeigten Lücken hat. Vergl. §. 31, 3. VI.

8. Wenn ω real endlich aber nicht null, wenn $a_0, a_1, a_2, \,..$ real, von a_k an positiv sind und eine fallende Reihe bilden, so daß a_n bei hinreichend großem n beliebig klein, so ist die Reihe

$$a_0 + a_1 e^{i\omega} + a_2 e^{2i\omega} + \,..$$

absolut konvergent. Denn die mit dem Faktor $1 - e^{i\omega}$, der nicht null ist, multiplicierte Fortsetzung

$$(1 - e^{i\omega})(a_n e^{i\omega n} + a_{n+1} e^{i\omega(n+1)} + \ldots)$$
$$= a_n e^{i\omega n} - (a_n - a_{n+1}) e^{i\omega(n+1)} - (a_{n+1} - a_{n+2}) e^{i\omega(n+2)} - \ldots$$

hat einen absoluten Wert, der kleiner ist als

$$a_n + (a_n - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_{n+2}) + \ldots < 2a_n$$

also beliebig klein bei hinreichend großem n.

Daher sind unter den angezeigten Beschränkungen der Variablen ω und der Coefficienten a die trigonometrischen Reihen von ω

$$a_0 + a_1 \cos\omega + a_2 \cos 2\omega + \ldots$$
$$a_1 \sin\omega + a_2 \sin 2\omega + \ldots$$

konvergent bei der angegebenen Ordnung ihrer negativen Glieder. In besondern Fällen kann $\omega = 0$ von dem Konvergenzgebiet dieser Reihen nicht ausgeschlossen sein.

Diesen Satz findet man bei Scheibner Unendliche Reihen 1860 p. 9. Vergl. Abel a. a. O. und Dirichlet Liouville J. 1862 p. 253. Die trigonometrischen Reihen von ω sind zur Darstellung von Funktionen der ω eingeführt worden von Daniel Bernoulli und Euler Mém. de Berlin 1753. Über diese Reihen vergl. Euler Introd. I c. 14. Calc. int. I n° 272 und 351. Nova Acta Petrop. t. 11 p. 114 nebst den in Reuß Repertorium comm. p. 93 angezeigten Abhandlungen; ferner Fourier Theorie de la chaleur 1822 c. 3 und p. 587, nach welchem diese Reihen Fouriersche Reihen genannt werden; Jacobi 1827 Crelle J. 2 p. 1, Dirichlet 1829 Crelle J. 4 p. 157 und Dove Repertorium der Physik 1837 Bd. 1, Riemann Habilitationsschrift 1854 (Werke p. 213), Heine Kugelfunktionen 1 p. 53, u. a.

Drittes Buch.

Algebra.

§. 1. Die Proportionen.

(Heis §. 31—33.)

1. Das Verhältnis $A : B$ (Allg. Arithm. §. 10) der Größe A zu der gleichartigen Größe B ist $\gtreqless 1$, je nachdem $A \gtreqless B$. Indem man A mit den Vielfachen von B oder mit den Vielfachen eines hinreichend kleinen Teiles von B vergleicht, findet man, wenn l, m, n ganze Zahlen bedeuten, entweder $A = lB$, oder $A = \frac{m}{n}B$, oder die Begrenzung

$$\frac{m}{n}B < A < \frac{m+1}{n}B$$

Demnach wird das Verhältnis $A : B$ entweder genau ausgedrückt durch die ganze Zahl l oder durch den Bruch $\frac{m}{n}$, oder begrenzt bei beliebigem n durch die Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{m+1}{n}$ mit einem Fehler, der $\frac{1}{n}$ nicht erreicht, und der bei hinreichend großem n beliebig klein ist. Wenn es bei der Begrenzung bewenden muß, so ist das Verhältnis der Größen irrational (Allg. Arithm. §. 16, 1), und die Größen heißen **inkommensurabel** (ἀσύμμετρος), während Größen von rationalem Verhältnis **kommensurabel** (σύμμετρος) genannt werden.

Wenn man zur Bestimmung des Verhältnisses von zwei Strecken die kleinere auf die größere so oft als möglich aufträgt, den Rest so oft als möglich auf die kleinere, den zweiten Rest so oft als möglich auf den ersten Rest, u. s. f. und wenn man findet, daß kein Rest in dem vorhergehenden Reste aufgehen kann, so schließt man (Allg. Arithm. §. 13, 3), daß die Strecken inkommensurabel sind (Eucl. X, 2). Beispiele: Legendre Géom. III probl. 19 (vergl. Eucl. X, 117), Kunze Planim. 1. Aufl. 170. Bretschneider Grunert Archiv 3 p. 440.

2. Wenn jede Begrenzung des Verhältnisses von einem Paar Größen zugleich eine Begrenzung des Verhältnisses von einem andern Paar Größen ist, so sind die Verhältnisse gleich*). Allg. Arithm. §. 16, 2.

*) Eucl. V. def. 5.

Bei hinreichend kleinem $\delta : a$ entscheidet das erste Glied der eingeschlossenen Reihe. Also ist die Logarithmendifferenz dem Verhältnis der Numerndifferenz zu dem Numerus um so genauer proportional, je geringer dieses Verhältnis ist. Vergl. §. 20, 4.

5. Aus den Reihen (4), wenn sie konvergent sind,

$$\log(1+h) = \quad h - \tfrac{1}{2}h^2 + \tfrac{1}{3}h^3 - \ldots$$
$$\log(1-h) = -h - \tfrac{1}{2}h^2 - \tfrac{1}{3}h^3 - \ldots$$

folgt durch Subtraktion

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{1+h}{1-h} = h + \tfrac{1}{3}h^3 + \tfrac{1}{5}h^5 + \ldots$$

oder nach der Substitution $\dfrac{1+h}{1-h} = a$, $|h| = \left|\dfrac{a-1}{a+1}\right| < 1$

$$\tfrac{1}{2}\log a = \frac{a-1}{a+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 + \ldots$$

insbesondere bei realen positiven ganzen m, n, $m-n$, u, v

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{m}{n} = \frac{m-n}{m+n} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3 + \ldots$$

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{u+v}{u} = \frac{v}{2u+v} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{v}{2u+v}\right)^3 + \ldots$$

Z. B. $u = 1$, $v = 1$ giebt $\log 2$. Durch Verdopplung findet man $\log 4$, und $u = 4$, $v = 1$ giebt $\log 5 - \log 4$. Daher wird $\log 10 = \log 2 + \log 5$ gefunden, und

$$1 : \log 10 = 0{,}434\,29\ldots \text{ (§. 19, 3)}$$

Die für $\frac{1}{2}\log a$ gegebene Reihe konvergiert, wenn der reale Teil von a positiv ist. Unter der Voraussetzung $a = p + iq$ ist

$$\left|\frac{a-1}{a+1}\right|^2 = \frac{(p-1)^2+q^2}{(p+1)^2+q^2} < 1$$

wenn $(p+1)^2 > (p-1)^2$ d. h. $p > 0$. Wenn der reale Teil von a negativ ist, so hat die Zahl $-a$ einen positiven realen Teil, und es ist $\log a = \log(-1) + \log(-a)$. Vergl. §. 31, 13.

Wenn $\log a$ gefunden ist und x einem bestimmten Gebiet angehört, welches a umgiebt, so wird $\log x$ gefunden als eine absolut konvergente Potenzreihe von $x - a$. Dazu wird erfordert, daß der Punkt x von dem Nullpunkt verschieden in oder auf dem Kreis liegt, dessen Centrum der Punkt a ist und dessen Umfang den Nullpunkt enthält. Denn es ist

$$x = a\left(1 + \frac{x-a}{a}\right), \quad \log x = \log a + \log\left(1 + \frac{x-a}{a}\right)$$

Wenn $|x-a| \leqq |a|$, aber nicht $x - a = -a$ d. h. nicht $x = 0$, so ist

$$\log x = \log a + \frac{x-a}{a} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{x-a}{a}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x-a}{a}\right)^3 - \ldots$$

6. Aus den Relationen (§. 31, 8)

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

folgt durch Division

$$e^{2ix} = \frac{\cos x + i \sin x}{\cos x - i \sin x} = \frac{1 + i \operatorname{tang} x}{1 - i \operatorname{tang} x}$$

$$x = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + i \operatorname{tang} x}{1 - i \operatorname{tang} x}$$

Es ist $|i \operatorname{tang} x| = |\operatorname{tang} x|$, $\operatorname{tang}(-x) = -\operatorname{tang} x$. Wenn nun $|\operatorname{tang} x| \leqq 1$, so hat man (5) ohne Ausnahme

$$\tfrac{1}{2} \log \frac{1 + i \operatorname{tang} x}{1 - i \operatorname{tang} x} = i \operatorname{tang} x + \tfrac{1}{3}(i \operatorname{tang} x)^3 + \ldots$$

Also ist bei allen x des realen Gebietes von $-\frac{1}{4}\pi$ bis $\frac{1}{4}\pi$ ohne Ausnahme

$$x = \operatorname{tang} x - \tfrac{1}{3}(\operatorname{tang} x)^3 + \tfrac{1}{5}(\operatorname{tang} x)^5 - \ldots *)$$

An der Grenze $x = \frac{1}{4}\pi$, wo $\operatorname{tang} x = 1$, findet man die unendliche Reihe (Leibniz a. a. O. und Acta Erud. 1682)

$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \ldots$$

welche bei der gegebenen Anordnung der Glieder gegen den zwischen $\frac{2}{3}$ und 1 liegenden Wert $\frac{1}{4}\pi$ eben noch konvergiert. Vergl. §. 31, 2.

Leichtere Berechnungen der Zahl π sind von Newton a. a. O. angezeigt worden. Z. B. Aus geometrischen wie aus goniometrischen Gründen hat man $\operatorname{tang} \frac{1}{6}\pi = \sqrt{\frac{1}{3}}$, folglich

$$\tfrac{1}{6}\pi = \sqrt{\tfrac{1}{3}} - \tfrac{1}{3}\sqrt{\tfrac{1}{3}}^3 + \tfrac{1}{5}\sqrt{\tfrac{1}{3}}^5 - \ldots$$

Oder man setzt $\frac{1}{4}\pi$ aus mehreren stark konvergierenden unendlichen Reihen zusammen. Wenn $\alpha + \beta = \frac{1}{4}\pi$, so ist

$$\frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta}{1 - \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta} = 1$$

*) Jac. Gregory. Vergl. den Brief Oldenburgs an Leibniz 1675 April 12. Auch Leibniz (Brief an Oldenburg 1676 Aug. 27) und Newton (Brief an Leibniz 1676 Okt. 24) waren im Besitz dieser Reihe.

durch andere, F, G, H, ersetzt, welche sich zu einander der Reihe nach verhalten wie A, B, C.

Beweis. Vermöge der Proportion $F : G : H = A : B : C$ ist $F : A = G : B = H : C$ (6). Multipliciert man in den Polynomien die Größen A, B, C der Reihe nach mit $F : A, G : B, H : C$, so treten F, G, H an die Stelle von A, B, C, ohne daß das Verhältnis der Polynomien sich verändert hat, weil ihre Glieder mit derselben Zahl multipliciert worden sind.

Beispiele. Wenn $A : B : C = F : G : H$, so ist

$$A \pm B : C = F \pm G : H$$

$$A \pm B \pm C : A = F \pm G \pm H : F, \text{ u. s. w.}$$

Ist $Ax + By + Cz = 0$, so ist auch $Fx + Gy + Hz = 0$.

8. Aus zwei Proportionen kann eine neue abgeleitet werden, indem man die Größen der einen der Reihe nach mit den Größen der andern multipliciert. Aus

$$A : B : C = F : G : H$$
$$L : M : N = P : Q : R$$

folgt die Proportion

$$AL : BM : CN = FP : GQ : HR$$

Beweis. $AL : BM = (A : B)(L : M)$ wie oben (5). Nun ist $A : B = F : G$, $L : M = P : Q$, folglich $AL : BM = (F : G)(P : Q) = FP : GQ$. U. s. w.

Umgekehrt wird aus der Proportion

$$AL : BM : CN = p : q : r$$

abgeleitet

$$A : B : C = \frac{p}{L} : \frac{q}{M} : \frac{r}{N}$$

9. Man unterscheidet hauptsächlich drei Mittel*) zwischen zwei Größen: das arithmetische, das geometrische, das harmonische.

Das arithmetische Mittel zwischen zwei Größen ist die halbe Summe derselben. Wenn x das arithmetische Mittel zwischen A und B bedeutet, so ist

$$x = \tfrac{1}{2}(A + B), \quad A - x = x - B$$

Die Differenz von zwei Größen wird in den älteren Rechenbüchern „das arithmetische Verhältnis" derselben, und die Gleichung von zwei

*) Nach dem Vorgange der ältern griechischen Mathematiker. Vergl. Nicomachus Arithm. II, 21. Pappus Coll. math. III, 5.

Differenzen „eine arithmetische Proportion" genannt. Die arithmetische Proportion $A - x = x - B$ heißt „stetig" (continua) mit Rücksicht darauf, daß die dritte Größe der zweiten gleich ist.

Das geometrische Mittel zwischen zwei Größen ist die Quadratwurzel des Produkts derselben. Wenn y das geometrische Mittel zwischen A und B bedeutet, so ist (5)

$$y = \sqrt{AB}, \quad A : y = y : B$$

Die Gleichung von Verhältnissen $A : y = y : B$ wird „eine geometrische Proportion" genannt, und zwar „stetig" mit Rücksicht darauf, daß die dritte Größe der zweiten gleich ist. Daher sagt man auch „geometrische mittlere Proportionale" für geometrisches Mittel.

Das harmonische Mittel zwischen zwei Größen ist die Größe, deren Reciproke das arithmetische Mittel zwischen den Reciproken der Größen ist, wobei unter der Reciproken der Größe das Verhältnis der Einheit zur Größe verstanden wird (5). Wenn z das harmonische Mittel zwischen A und B, x und y das arithmetische und das geometrische Mittel zwischen denselben Größen bedeuten, so ist

$$\frac{1}{z} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right) = \frac{A+B}{2AB}$$

$$A - z : z - B = A : B, \quad x : y = y : z$$

Ebenso versteht man unter dem arithmetischen Mittel zwischen n Größen den $n$ten Teil ihrer Summe, unter dem geometrischen Mittel zwischen denselben die $n$te Wurzel ihres Produkts, unter dem harmonischen Mittel zwischen denselben die Größe, deren Reciproke das arithmetische Mittel zwischen den Reciproken der Größen ist. „Harmonisch" heißt überhaupt eine Reihe von Gliedern, deren Reciproken eine arithmetische Progression bilden (Allg. Arithm. §. 28, 5), zufolge ihrer Anwendung bei der Theorie der Tonleitern. „Geometrisch" wurde eine Proportion genannt wegen ihrer Anwendung in Euclids Elementen.

10. Das geometrische Mittel zwischen zwei Größen ist kleiner als das arithmetische Mittel; die Differenz beträgt weniger als das Quadrat der Differenz der Größen dividiert durch die 8fache kleinere Größe*).

$$\tfrac{1}{2}(A+B) - \sqrt{AB} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{A} - \sqrt{B})^2$$

$$= \frac{(A-B)^2}{2(\sqrt{A}+\sqrt{B})^2} < \frac{(A-B)^2}{8B}$$

Überhaupt wird das Produkt der Teile einer gegebenen Summe am größten, wenn die Teile einander gleich sind. Denn das Produkt

*) Lenthéric Gerg. Ann. 21 p. 84. Das geometrische Mittel zwischen n Größen ist kleiner als das arithmetische. Liouville J. 4 p. 493.

der ungleichen Teile läßt sich vermehren, indem man zwei ungleiche Teile durch gleiche, nämlich jeden durch ihr arithmetisches Mittel ersetzt.

Dagegen wird die Summe der Faktoren eines gegebenen Produkts am kleinsten, wenn die Faktoren einander gleich sind. Betrüge die Summe der gleichen Faktoren ebensoviel oder mehr als die Summe der ungleichen Faktoren, so wäre das erstere Produkt größer als das letztere, gegen die Voraussetzung.

§. 2. Funktionen von Variablen.

1. Eine Größe heißt abhängig von andern Größen, wenn durch Veränderung der letztern eine Veränderung der erstern bewirkt wird. Die Größen, von denen eine Größe abhängt, werden die Variablen (Argumente), die abhängige Größe eine Funktion*) der Variablen genannt. Z. B. der Preis einer Ware ist eine Funktion ihrer Masse; das Volum eines Körpers ist eine Funktion der Temperatur und Pressung; Potenz, Wurzel, Logarithmus einer Zahl sind Funktionen der Zahl; eine Formel ist eine Funktion der Unbestimmten (Buchstaben), welche in ihr vorkommen. Wenn die Funktion von einer Variablen abhängt, so entspricht jedem gegebenen Wert der Variablen ein (eindeutig oder mehrdeutig) bestimmter Wert der Funktion, verschiedenen Werten der Variablen entsprechen im allgemeinen verschiedene Werte der Funktion. Wenn die Funktion von mehrern Variablen abhängt, so entspricht jedem gegebenen Verein von Werten aller Variablen ein bestimmter Wert der Funktion, einem Wert einer Variablen entspricht eine einfach oder mehrfach unendliche Mannigfaltigkeit von Werten der Funktion.

Irgend eine Funktion der Variablen x**) z. B. eine Formel, in der die Unbestimmte x vorkommt, wird durch einen Buchstaben (Funktionszeichen) bezeichnet, dem man in Klammern den entsprechenden Wert der Variablen zusetzt. Z. B. $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ bedeuten verschiedene von x abhängende Formeln, die dem Wert x der Variablen entspre-

*) Leibniz nannte Funktionen allerlei zu einem Punkt einer Kurve gehörige Elemente, seine Absciße, Ordinate, Tangente, Normale u. s. f. (Acta Erud. 1692 De linea etc. 1694 Nova calculi etc. Brief an Huygens 1694 Juni 29). Joh. Bernoulli brauchte 1718 den Ausdruck Funktion in dem jetzt gebräuchlichen Sinne (opp. II p. 241). Die Bezeichnung $f(x)$ scheint Clairaut zuerst angewandt zu haben (Mém. de l'acad. Paris 1733 p. 269).

**) Zur Bezeichnung von Variablen und Funktionen wurden von Vieta Vokale gebraucht; die heutige Bezeichnung rührt von Descartes her.

chenden Werte der f-Funktion, der g-Funktion, der h-Funktion. Ebenso bezeichnet man eine Funktion der Variablen x und y durch $F(x, y)$, u. s. w. Unter $f(0)$, $f(1)$, .. versteht man dann die Werte $f(x)$, welche den Werten $x = 0, 1, ..$ der Variablen entsprechen; unter $F(0, 1)$ versteht man den Wert der $F(x, y)$, welcher den Werten $x = 0$, $y = 1$ der Variablen entspricht u. s. w. Der einem gegebenen Weg der Variablen entsprechende Verlauf der Funktion kann dadurch verdeutlicht werden, daß man mit einer Reihe von Werten der Variablen die Reihe der entsprechenden Werte der Funktion tabellarisch zusammenstellt. Z. B.

$$f(x) = \frac{3 + 4x}{7 - 2x^2}$$

x	$f(x)$
$-\infty$	0
-3	0,82
-2	5
$-\sqrt{3,5}$	∞
-1	$-0,2$
$-0,75$	0
0	0,43
1	1,4
$\sqrt{3,5}$	∞
2	-11
3	$-1,36$
∞	0

Um den Inhalt der Tabelle zur Anschauung zu bringen, konstruiert man auf einer beliebigen Geraden nach einem beliebigen Maßstab die (realen) Werte der Variablen als Abscissen d. h. als Strecken der Geraden, die von dem (beliebig gewählten) Nullpunkt derselben anfangen, und die entsprechenden Werte der Funktion, wenn sie real sind, als Ordinaten d. h. als Strecken, die normal zu den Abscissen stehen und von den Endpunkten derselben anfangen. Die Linie, auf der die Endpunkte der Ordinaten liegen, wird durch den gegebenen Zusammenhang der Funktion mit der Variablen bestimmt.

Nicht-reale Werte der Variablen und der Funktion können durch Abscissen und durch Ordinaten nicht dargestellt werden. Komplexen Werten der Variablen entsprechen im allgemeinen komplexe Werte der Funktion. Zur Veranschaulichung braucht man dann auf der Zahlenebene die Figur der Punkte der Variablen und die Figur der entsprechenden Punkte der Funktion (Allgem. Arithm. §. 16, 10).

2. Wenn die Werte der Funktion zu einander der Reihe nach sich verhalten wie die entsprechenden Werte der Variablen (die $m$ten Potenzen dieser Werte), so heißt die Funktion proportional der

Variablen (der $m$ten Potenz derselben). Wird die Variable $p$mal so groß, so wird die Funktion $p$mal (p^mmal) so groß. Wenn man durch a den Quotienten eines Wertes der Funktion durch den entsprechenden Wert der Variablen bezeichnet, so ist $f(x) = ax$ oder ax^m (§. 1, 6).

Beispiele. Die Masse eines Körpers ist seinem Gewichte proportional. Der Preis einer Ware ist dem Gewichte derselben proportional, wenn nicht die Größe des käuflichen Gegenstandes seinen Preis erhöht. Die Fläche des Kreises ist dem Quadrat des Radius proportional. Das Volum der Kugel ist dem Kubus des Radius proportional. Die Falltiefe ist dem Quadrat der Fallzeit proportional.

3. Wenn die Werte der Funktion zu einander der Reihe nach sich verhalten, wie die Reciproken der entsprechenden Werte der Variablen oder wie die Reciproken der $m$ten Potenzen dieser Werte, so heißt die Funktion umgekehrt (indirekt) proportional der Variablen oder ihrer $m$ten Potenz. Wird die Variable $p$mal so groß, so wird die Funktion den $p$ten Teil oder den p^mten Teil so groß. Wenn man durch a das Produkt eines Wertes der Funktion und des entsprechenden Wertes der Variablen bezeichnet, so ist $f(x) = \frac{a}{x}$ oder $\frac{a}{x^m}$.

Beispiele. Bei bestimmter Arbeit ist die Arbeitszeit umgekehrt proportional der angewandten Kraft. Die Krümmung des Kreises ist dem Radius umgekehrt proportional. Die Helligkeit einer verschwindend kleinen beleuchteten Fläche ist dem Quadrat ihres Abstandes vom Lichtpunkte umgekehrt proportional. Das Gewicht eines Körpers ist dem Quadrat seines Abstandes vom Attraktionscentrum umgekehrt proportional.

Wenn die Funktion der Variablen oder einer Potenz derselben proportional oder umgekehrt proportional ist, so kann man aus einem Wert der Variablen und dem entsprechenden Wert der Funktion den einem andern Wert der Variablen entsprechenden Wert der Funktion durch Regel de tri berechnen (Gem. Arith. §. 6).

4. Wenn den Werten a, x der Variablen die Werte b, y der Funktion entsprechen, so sind $x - a$, $y - b$ entsprechende Differenzen (incrementa) der Variablen und der Funktion. Wenn jeder hinreichend kleinen Differenz $x - a$ der Variablen eine beliebig kleine Differenz $y - b$ der Funktion entspricht, so heißt die Funktion kontinuierlich (stetig) bei dem Wert a der Variablen. Wenn bei dem in Betracht gezogenen Wert a der Variablen diese Bedingung nicht erfüllt ist, so hat die Funktion bei dem Wert a der Variabeln eine Diskontinuität (Stetigkeits-Unterbrechung).

I. Wenn die Funktion, während die Variable die realen Werte $a_1, a_2, .., a_n$ in steigender Reihe erhält, kontinuierlich den realen Weg von b_1 bis b_n zurücklegt, auf welchem 0 und ∞ nicht liegen, so haben die Werte der Funktion dasselbe Zeichen. Der z. B. positive Wert b_k der Funktion hat den Nachbar $b_{k+1} = b_k + (b_{k+1} - b_k)$, welcher positiv ist, weil $b_{k+1} - b_k$ entweder $\geqq 0$ ist oder negativ, aber bei hinreichend kleiner Differenz $a_{k+1} - a_k$ beliebig klein.

II. Wenn die Funktion, während die Variable den angezeigten realen Weg von a_1 bis a_n zurücklegt, kontinuierlich von b_1 bis b_n geht, und wenn b_1 und b_n konträre Zeichen haben, so giebt es zwischen a_1 und a_n einen Wert a_k der Variablen, welchem der Wert 0 oder ∞ der Funktion entspricht. Wenn nicht, so hätte b_n das Zeichen von b_1.

III. Wenn bei den vorigen Voraussetzungen $b_n = b_1$ ist, so existiert zwischen a_1 und a_n ein realer Wert a' der Variablen, welchem ein extremer Wert der Funktion entspricht, ein Maximum oder ein Minimum d. h. größer oder kleiner als hinreichend nahe vor- und nachstehende Werte der Funktion. Denn die Funktion kann von dem Wert b_1 aus weder durchaus steigen noch durchaus fallen, um den Wert $b_n = b_1$ zu erreichen.

5. I. Wenn die Differenz $b_1 - b$ der Funktion durch die entsprechende Differenz $a_1 - a$ der Variablen und Potenzen dieser Differenz ausgedrückt werden kann (Voraussetzung der Differentialrechnung), so ist die Funktion kontinuierlich bei dem Wert a der Variablen, und die Differenz der Funktion ist der entsprechenden Differenz der Variablen proportional mit einem bei hinreichend kleiner Differenz der Variablen beliebig kleinen Fehler. Denn nach der Voraussetzung

$$b_1 - b = p(a_1 - a) + q(a_1 - a)^2 + .. = (p + \delta)(a_1 - a)$$

ist δ eine konvergente Potenzreihe von $a_1 - a$ und teilbar durch $a_1 - a$, folglich ist bei hinreichend kleiner Differenz $a_1 - a$ nicht nur δ, sondern auch $b_1 - b$ beliebig klein. Wenn ebenso

$$b_2 - b = p(a_2 - a) + q(a_2 - a)^2 + .. = (p + \delta')(a_2 - a)$$

so ist bei hinreichend kleinen $a_1 - a$, $a_2 - a$

$$\frac{b_1 - b}{a_1 - a} - \frac{b_2 - b}{a_2 - a} = \delta - \delta'$$

beliebig klein d. h.

$$\frac{b_2 - b}{a_2 - a} = \frac{b_1 - b}{a_1 - a}$$

mit einem beliebig kleinen Fehler.

Hierin ist die von den Nachfolgern Diophants ausgebildete „regula falsorum“ (el-chataayn, vergl. Drobisch de Widmanni compendio p. 29, falsarum positionum bei Leonardo lib. abaci fol. 141, regula aurea bei Cardano ars magna cap. 30) enthalten, sowie die Regel für die Interpolation der Tabellen von bestimmten Funktionen. Allg. Arithm. §. 20, 4. Vergl. unten §. 8, 4.

II. Im realen Gebiet haben, nachdem p gefunden und weder 0 noch ∞ ist, bei hinreichend kleiner Differenz der Variablen die Werte $p + \delta$ und p dasselbe Zeichen (4, I). Daher haben die entsprechenden Differenzen $b_1 - b$ und $a_1 - a$ dasselbe oder nicht dasselbe Zeichen, je nachdem p positiv ist oder negativ, d. h. die Funktion beginnt von b aus zu steigen oder zu fallen, während die Variable von a aus wächst, je nachdem p positiv ist oder negativ.

Wenn p null ist, so bleibt die Funktion unverändert, während die Variable von a aus sich zu ändern beginnt, d. h. dem Wert a der Variablen entspricht ein Wert der Funktion, der entweder ein Maximum ist (beim Übergang der Funktion aus dem Steigen ins Fallen, während die Variable den Wert a durchläuft), oder ein Minimum (beim Übergang der Funktion aus dem Fallen ins Steigen), oder keines von beiden.

Der entscheidende Entwickelungscoefficient p heißt die Fluxion der Funktion (nach Newton) oder ihr Differentialquotient (nach Leibniz) oder ihre Derivierte, Abgeleitete, Ableitung (nach Lagrange). S. unten §. 10.

6. Eine Funktion einer Variablen heißt ganz (integra) und $m$ten Grades, wenn sie ein Polynomium ist, dessen Glieder Potenzen der Variablen enthalten mit positiven ganzen Exponenten, deren größter m ist. Z. B.

$$ax + b$$
$$ax^2 + bx + c$$
$$ax^3 + bx^2 + cx + d$$

u. s. w. sind ganze Funktionen von x 1ten, 2ten, 3ten Grades (linear, quadratisch, kubisch), wenn die Coefficienten a, b, c, d konstant

d. h. von x unabhängig, übrigens beliebig sind. Weil $(a + x)^2 - x^2 = a^2 + 2ax$, so ist $(a + x)^2 - x^2$ in Wahrheit eine Funktion von x ersten Grades.

Eine ganze Funktion von x ist bei endlichem x endlich und durchaus kontinuierlich (4). Die ganze Funktion A heißt teilbar durch die ganze Funktion B, und B ein Divisor von A, wenn der Quotient $A : B$ eine ganze Funktion oder konstant ist. Z. B. $a^m - x^m$ ist teilbar durch $a - x$.

Ein Polynomium, welches eine ganze Funktion ist sowohl der Variablen x, als auch der Variablen y, heißt eine ganze Funktion der beiden Variablen und $m$ten Grades, wenn seine Glieder Produkte variabler Faktoren x, y enthalten, deren größte Anzahl m ist. Z. B.

$ax + by + c$ ist eine lineare Funktion von x und y,

$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ ist eine quadratische Funktion von x und y. U. s. w.

7. Wenn B eine ganze Funktion ist, und A eine Konstante oder eine ganze Funktion, welche durch B nicht teilbar ist, so heißt der Quotient $A : B$ eine gebrochene Funktion. Die gebrochene Funktion ist bei bestimmten endlichen Werten der Variablen, welchen $B = 0$ entspricht, unendlich, übrigens durchaus kontinuierlich (4). Die ganzen und die gebrochenen Funktionen werden rational genannt.

Eine gebrochene Funktion heißt echt oder unecht gebrochen, je nachdem der Grad des Divisor den Grad des Dividendus übersteigt oder nicht übersteigt. Eine unecht gebrochene Funktion läßt sich durch Division zerteilen in eine ganze Funktion, welche sich auch auf eine Konstante reducieren kann, und in eine echt gebrochene Funktion (Allg. Arithm. §. 12).

Aus den gegebenen ganzen Funktionen A, B findet man durch successive Divisionen die Kette (Allg. Arithm. §. 13, 3)

$$\begin{aligned} A &= BP + C \\ B &= CQ + D \\ &\cdots\cdots \\ L &= MU + N \end{aligned}$$

wobei die Grade der ganzen Funktionen A, B, C, D, .. eine fallende Reihe bilden, und die Quotienten P, Q, .. ganze Funktionen sind. Um ganze Coefficienten zu erreichen, versieht man die Dividenden mit hinreichenden positiven Multiplikatoren. Jeder der Reste C, D, .., N kann aus A und B komponiert werden.

Eine ganze Funktion, die in A und B aufgeht (6), ist ein Divisor von $C, D, \ldots$ Wenn die Funktion N ein Divisor von M ist, so ist sie der größte gemeinschaftliche Divisor von A und B, und ihre Coefficienten sind aus den Coefficienten von A und B rational zusammengesetzt. Wenn N von der Variablen unabhängig ist, so ist die gebrochene Funktion $A:B$ irreducibel. Über die Formulierung des gemeinschaftlichen Divisor von zwei gegebenen ganzen Funktionen und über die Bedingungen seiner Existenz vergl. unten §. 10.

8. Wenn mehrere Unbestimmte durch eine Gleichung verbunden sind, so ist die unendliche Mannigfaltigkeit der Werte von einer derselben beschränkt, von den übrigen unbeschränkt. Jede der Unbestimmten kann als die Unbekannte betrachtet werden, welche vermöge der gegebenen Gleichung durch die übrigen Unbestimmten eindeutig oder mehrdeutig bestimmt, d. h. eine bestimmte Funktion dieser Variablen ist. Die Funktion heißt durch die Gleichung implicite (unentwickelt) gegeben, bis daß ihr Wert gemäß der Gleichung durch die Variablen ausgedrückt ist (explicite).

Wenn u eine gegebene ganze Funktion von x $m$ten Grades und von y $n$ten Grades ist (6), und wenn die Gleichung $u = 0$ gegeben ist, so heißt y eine algebraische Funktion von x, und ist durch den Wert x der Variablen (abgesehn von einzelnen Werten derselben) $n$deutig bestimmt (biformis, triformis, . . vergl. §. 10). Einem rationalen x entsprechen im allgemeinen irrationale y, einem Weg der Variablen entsprechen n Zweige der Funktion (1).

Bei $n = 1$ ist y eine rationale Funktion von x, gebrochen oder ganz. Wenn $n > 1$ und u ein Binomium, so heißt y eine irrationale algebraische Funktion von x. Rationale Funktionen sind eindeutig. Die irrationale Funktion $a + \sqrt{x}$ ist 2deutig, außer bei $x = 0$, dem ein gemeinschaftlicher Punkt der beiden Zweige der Funktion (ein Verzweigungspunkt) entspricht. Die irrationale Funktion $\sqrt{a - bx} + \sqrt[3]{c - dx}$ ist 6deutig, und 3deutig bei $x = a : b$, 2deutig bei $x = c : d$.

Wenn y an x durch eine Gleichung gebunden und keine algebraische Funktion von x ist, so heißt sie eine transscendente*) Funktion von x. Z. B. a^x, $\cos x$, $\log x$, $\arccos x$ sind transscendente Funktionen von x, die beiden ersten eindeutig, die beiden letzten unendlichdeutig. Ganze Funktionen unendlichen Grades sind im allgemeinen nicht algebraisch;

*) Diese Unterscheidungen sind im 17ten Jahrh. gemacht worden. Die Benennungen rühren hauptsächlich von Leibniz her. Acta Erud. 1682, 1684 p. 234. Vergl. Euler Introd. I cap. 1. Abel Crelle J. 1 p. 67.

Potenzreihen sind rational, wenn sie rekurrent sind (Allg. Arithm. §. 12, 4). Über andre Kriterien vergl. Heine Crelle J. 48 p. 267.

9. Wenn eine Funktion von mehrern Variablen so abhängt, daß durch Multiplikation der Werte der einzelnen Variablen mit t der Wert der Funktion mit t^m multipliciert wird,

$$f(tx, ty, ..) = t^m f(x, y, ..)$$

so heißt die Funktion homogen von m Dimensionen*). Z. B.

$$ax^2 + 2bxy + cy^2,\ \sqrt{xy},\ \sqrt{x - y},\ \log x - \log y,\ \frac{ax + by}{x^2 - y^2}$$

sind homogene Funktionen von 2, 1, $\frac{1}{2}$, 0, -1 Dimensionen.

Eine ganze homogene Funktion von 1, 2, 3, .. Dimensionen, deren Glieder je 1, 2, 3, .. variable Faktoren enthalten, heißt eine Form 1ten, 2ten, 3ten, .. Grades (linear, quadratisch, kubisch, ..), und zwar binär, ternär, .. nach der Anzahl der Variablen**). Z. B. $ax^2 + 2bxy + cy^2$ ist eine binäre quadratische Form der Variablen x, y. Jedes Glied einer Form $m$ten Grades von n Variablen enthält eine Kombination von m gleichen oder ungleichen variablen Faktoren; also hat die allgemeine Form $m$ten Grades von n Variablen

$$\binom{n + m - 1}{m} = \binom{m + n - 1}{n - 1}$$

Glieder (Allgem. Arithm. §. 25, 6).

Die Glieder einer nicht homogenen ganzen Funktion $m$ten Grades können in Formen der Grade 0, 1, 2, .., m verteilt werden. Bezeichnet man die Formen durch $f_0, f_1, ..$ und eine neue Variable durch t, so erscheint die nicht homogene ganze Funktion $f_0 + f_1 + .. + f_m$ als der Wert der Form $t^m f_0 + t^{m-1} f_1 + t^{m-2} f_2 + .. + t f_{m-1} + f_m$, welchen die letztere bei $t = 1$ annimmt. Eine nicht homogene ganze Funktion $m$ten Grades von n Variablen ist ein besonderer Wert einer Form von $n + 1$ Variablen; sie hat demnach im allgemeinen $\binom{n + m}{m} = \binom{n + m}{n}$ Glieder.

10. Eine Funktion mehrerer Variablen heißt symmetrisch oder alternierend***), je nachdem sie durch Vertauschung der Werte von

*) Euler Introd. I cap. 5.
**) Gauß Disq. arithm. 153. 266.
***) Die Benennung „symmetrische Funktion", wofür man sonst functio invariabilis sagte (Lagrange, auch Gauß disq. arithm. 347), ist von Lacroix eingeführt worden (Zusätze zu Clairaut élém. d'algèbre 5. éd. 1797, I p. 298. Compl.

je zwei Variablen denselben oder den entgegengesetzt gleichen Wert erhält. Z. B.

$$x + y,\ x^2 + y^2 + axy,\ (x - y)^2,\ \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)}$$

$$\cos(x - y),\ xy + yz + xz - x^2 - y^2 - z^2$$

sind symmetrische Funktionen von x, y, z, weil sie sich nicht ändern, wenn man x mit y, oder x mit z, oder y mit z vertauscht;

$$x - y,\ (x - y)^3,\ \sin(x - y),\ (x - y)(x - z)(y - z)$$

sind alternierende Funktionen von x, y, z, weil sie den entgegengesetzten Wert erhalten, wenn x mit y, oder x mit z, oder y mit z vertauscht wird. Die Determinanten (Allg. Arithm. §. 26) sind alternierende Funktionen ihrer Elemente. Das Quadrat einer alternierenden Funktion ist eine symmetrische Funktion.

Wenn eine symmetrische Funktion von x, y, z das Glied $a_k x^\alpha y^\beta z^\gamma$ hat, so enthält sie die Glieder $a_k x^\alpha y^\gamma z^\beta$, $a_k x^\beta y^\alpha z^\gamma$, .., welche durch die gegenseitige Vertauschung von x, y, z oder von α, β, γ entstehen, mit demselben Coefficienten. Wenn eine ganze symmetrische Funktion der n Variablen $x, y, z, ..$ in Bezug auf jede einzelne Variable $m$ten Grades ist, so erhält man ihre Glieder aus der Formel $a_k x^\alpha y^\beta z^\gamma ..$, indem man für $\alpha\beta\gamma ..$ je n gleiche oder ungleiche Zahlen der Reihe 0, 1, 2, .., m in allen möglichen Anordnungen setzt; die Funktion hat also nicht mehr verschiedene Coefficienten, als es Kombinationen $\alpha\beta\gamma ..$ giebt, nämlich $\binom{m + 1 + n - 1}{n} = \binom{m + n}{n}$.

§. 3. Die analytische Methode.

1. Das allgemeinste Verfahren, mathematische Aufgaben zu lösen, besteht darin, daß man zuerst die gestellten Fragen mit einer oder mehreren Unbestimmten vorläufig beantwortet, als ob die Aufgabe gelöst wäre. Diese Unbestimmten heißen die Unbekannten der Aufgabe. Dann werden die Daten der Aufgabe (die gegebenen Größen) durch die Unbekannten ausgedrückt, und die gefundenen Formeln (Funktionen der Unbekannten) den Werten, welche sie haben sollen, gleichgesetzt. Endlich berechnet man, soweit es möglich ist, die Unbekannten aus den aufgestellten Gleichungen.

---

d'algèbre 1). Die alternierenden Funktionen haben ihren Namen durch Cauchy 1812 erhalten (Journ. de l'éc. polyt. Cah. 17), der die symmetrischen Funktionen in permanente und alternierende teilte.

Dieses indirekte Verfahren, welches mit unwesentlichen Veränderungen auch zur Erfindung von geometrischen Konstruktionen gebraucht wird, ist aus dem Altertum unter dem Namen Analysis*), analytische Methode bekannt.

Beispiel 1. Eine Gesellschaft von 90 Personen enthält 4 Männer mehr als Frauen, 10 Kinder mehr als Erwachsene. Aus wieviel Männern, Frauen, Kindern besteht die Gesellschaft?

Die Gesellschaft enthält x Frauen, folglich $x + 4$ Männer, $2x + 4$ Erwachsene, $2x + 14$ Kinder; zusammen $4x + 18$ Personen. Sie soll 90 Personen enthalten; also setzt man

$$4x + 18 = 90$$

Aus dieser Bedingung folgt $4x = 72$, $x = 18$, d. h. die Gesellschaft besteht aus 18 Frauen, 22 Männern, 50 Kindern.

Beispiel 2. Man gewinnt p Procent an einer Ware, die man für m Thaler verkauft. Wieviel Procent gewinnt man, wenn man die Ware für n Thaler verkauft?

Bei x Procent Gewinn werden $100 + x$ Thaler für 100, 1 Thaler für den $(100 + x)$ten Teil soviel, n Thaler für $n$mal soviel eingenommen, d. h. die Ware wurde für $\frac{100n}{100 + x}$ Thaler eingekauft. Die Ware wird aber mit p Procent Gewinn für m Thaler verkauft, soll also für $\frac{100m}{100 + p}$ Thaler eingekauft worden sein. Also setzt man

$$\frac{100n}{100 + x} = \frac{100m}{100 + p}$$

Aus dieser Bedingung folgt $\frac{100 + x}{n} = \frac{100 + p}{m}$,

*) Über die analytische Methode, als deren Erfinder Eudoxus (Platonische Schule 370 v. Chr.) genannt wird, handeln Euclides (Elem. 13 zu Anfang und Data, deutsch von Schwab 1780), Pappus Coll. math. 7, Vieta Isagoge in artem analyticam, Newton Arithm. univ. ed. Gravesande p. 64, u. a. Vergl. Klügel math. W. I p. 86. Reimer zu Bossut Gesch. d. Math. 1804, I p. 116. Berechnungen nach analytischer Methode haben im Altertum hauptsächlich Diophantus, nach ihm die Araber gelehrt. Im Beginn der neuern Zeit unterschied man ars minor s. ars rei et zensus — die Unbekannte hieß res, cosa und ihr Quadrat zensus, vergl. Allg. Arithm. §. 6 — und ars magna „quam vulgo cossam vocant sive regulas algebraicas" Cardanus 1545 Ars magna cap. 1. Die weitere Bearbeitung dieses Gebietes, welches die Namen Coß, Algebra bezeichneten, erfolgte neben der Ausbildung der Buchstabenrechnung. Seit Newton und Leibniz kam für die von ihnen ausgebildete Differential- und Integralrechnung der Name Analysis in Gebrauch. Jetzt versteht man unter Analysis die Theorie der Funktionen, unter algebraischer Analysis oder Algebra die Theorie der algebraischen Funktionen.

$$100 + x = (100 + p)\frac{n}{m}, \quad x = (100 + p)\frac{n}{m} - 100$$

d. h. die Ware wird für n Thaler mit $(100 + p)\frac{n}{m} - 100$ Procent Gewinn, oder ohne Gewinn und Verlust, oder mit $100 - (100 + p)\frac{n}{m}$ Procent Verlust verkauft, je nachdem $(100 + p)\frac{n}{m} - 100$ positiv oder null oder negativ ist.

Beispiel 3. Aus dem Orte A geht ein Bote ab, der in 5 Stunden 7 Meilen zurücklegt. Aus dem 8 Meilen rückwärts gelegenen Orte B geht 8 Stunden später dem ersten ein Bote nach, der in 3 Stunden 5 Meilen zurücklegt. Wann und wo wird der erste Bote vom zweiten eingeholt?

Der erste Bote ist bis zur Einholung x Stunden in Bewegung und legt $\frac{7}{5}x$ Meilen zurück. Der zweite Bote ist $x - 8$ Stunden in Bewegung und legt $\frac{5}{3}(x - 8)$ Meilen zurück. Die Differenz dieser Wege ist $\frac{5}{3}(x - 8) - \frac{7}{5}x$ Meilen, und soll 8 Meilen betragen. Also setzt man

$$\frac{5}{3}(x - 8) - \frac{7}{5}x = 8$$

Diese Bedingung lautet einfacher $\frac{4x}{15} - \frac{40}{3} = 8$, $\frac{4x}{15} = \frac{64}{3}$, $x = 80$, d. h. der erste Bote war 80 Stunden in Bewegung und 112 Meilen von A entfernt, als er von dem zweiten Boten eingeholt wurde.

Beispiel 4. Wenn a, b, c Thaler Kapital nach k, l, m Monaten fällig sind, nach wieviel Monaten kann die Summe $a + b + c$ Thaler ausgezahlt werden?

Nach x Monaten. Gesetzt, 1 Thaler in 1 Monat trägt 1 Einheit Zinsen, so tragen $a + b + c$ Thaler in x Monaten $(a + b + c)x$ Einheiten Zinsen, dagegen a Thaler in k Monaten, b Thaler in l Monaten, c Thaler in m Monaten zusammen $ak + bl + cm$ Einheiten. Die ersten Zinsen sollen den letztern gleich sein, also setzt man

$$(a + b + c)x = ak + bl + cm$$

Hieraus folgt $x = \frac{ak + bl + cm}{a + b + c}$.

Beispiel 5. Ein Wasserbehälter kann durch die Röhren A und B in 70 Minuten, durch A und C in 84 Minuten, durch B und C in

140 Minuten gefüllt werden. In wieviel Zeit kann er durch jede Röhre einzeln, in wieviel Zeit durch alle drei Röhren gefüllt werden?

Der Behälter kann durch A, B, C einzeln in x, y, z Minuten gefüllt werden, also liefern A, B, C in 1 Minute $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ Behälter, folglich

A und B in 70 Minuten $70\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ Behälter

A und C in 84 Minuten $84\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)$ Behälter

B und C in 140 Minuten $140\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ Behälter

Diese Größen sollen je 1 Behälter betragen. Also setzt man

$$70\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1 \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \;*\; =\frac{1}{70}$$

$$84\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)=1 \quad \frac{1}{x} \;*\; +\frac{1}{z}=\frac{1}{84}$$

$$140\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1 \quad * \;\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{140}$$

woraus $\frac{2}{x}=\frac{1}{70}+\frac{1}{84}-\frac{1}{140}=\frac{2}{105}$, $x=105$ gefunden wird. Ferner ist $\frac{1}{y}=\frac{1}{70}-\frac{1}{105}=\frac{1}{210}$, $y=210$. Endlich $\frac{1}{z}=\frac{1}{140}-\frac{1}{210}$ $=\frac{1}{420}$, $z=420$, d. h. die Röhren A, B, C füllen den Behälter einzeln in 105, 210, 420 Minuten.

Die drei Röhren zusammen liefern $(\frac{1}{105}+\frac{1}{210}+\frac{1}{420})$ Behälter in 1 Minute, folglich 1 Behälter in

$$\frac{1}{\frac{1}{105}+\frac{1}{210}+\frac{1}{420}}=60 \text{ Minuten.}$$

Beispiel 6. A und B haben zusammen c Thaler, der erste m Monate, der zweite n Monate lang, in einem Geschäft angelegt. An Kapital und Zinsen erhielten sie p und q Thaler zurück. Wieviel hatte jeder beigetragen?

A hatte x Thaler m Monate lang angelegt, also mx Einheiten Zinsen verdient (Beispiel 4). Sein Gewinn betrug $p-x$ Thaler, folglich 1 Einheit Zinsen $\frac{p-x}{mx}$ Thaler.

B hatte $c - x$ Thaler n Monate lang angelegt, also $n(c - x)$ Einheiten Zinsen verdient. Sein Gewinn betrug $q - (c - x)$ Thaler, folglich 1 Einheit Zinsen $\frac{q - (c - x)}{n(c - x)}$ Thaler. Die Einheit Zinsen soll aber $\frac{p - x}{mx}$ Thaler betragen, also setzt man

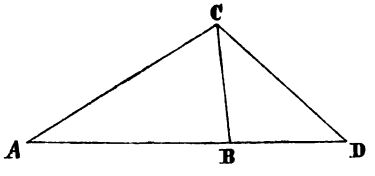
$$\frac{q - (c - x)}{n(c - x)} = \frac{p - x}{mx}$$

Die Entwickelung dieser Bedingung besteht in der Auflösung einer quadratischen Gleichung.

2. Konstruktionen nach analytischer Methode. Man konstruiert die gesuchte Figur willkürlich, und aus den Elementen der willkürlichen Figur diejenigen Elemente, welche von gegebener Größe oder Lage sein sollen. Hierdurch und durch geeignete Hilfslinien entstehen Hilfsfiguren, welche nach geometrischen Regeln durch die Daten bestimmt sind. Nun konstruiert man soweit es möglich ist aus den Daten die Hilfsfiguren, und aus diesen wiederum die gesuchten Figuren. Dabei zeigt es sich, welchen Bedingungen die Daten unterworfen sein müssen, damit die Aufgabe lösbar sei, und wieviel verschiedene Figuren den Forderungen der Aufgabe genügen können (Determination, διορισμός).

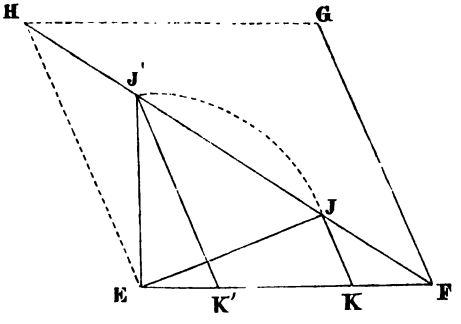
Beispiel 1. Das Dreieck zu konstruieren, in welchem ein Winkel, die gegenüberliegende Seite und die Summe der anliegenden Seiten von gegebener Größe sind.

Analysis. Das gesuchte Dreieck sei ABC, der gegebene Winkel B und die gegebene Seite CA. Wenn man auf der Verlängerung von AB die Strecke $BD = BC$ macht, so ist $AD = AB + BC$ die gegebene Summe, und der Winkel CDA die Hälfte des gegebenen Winkels B, weil das Dreieck DCB gleichschenkelig ist. Da nun in dem Hilfsdreieck ADC der Winkel D, die gegenüberliegende Seite CA, und die anliegende Seite AD gegeben ist, so läßt sich das Hilfsdreieck und daraus das gesuchte Dreieck konstruieren.



Konstruktion. Mache EF gleich der gegebenen Summe, GFE gleich dem gegebenen Winkel, und vollende den Rhombus $EFGH$, so

daß der Winkel $HFE = \frac{1}{2}GFE$ wird. Beschreibe um E mit der gegebenen Seite den Kreis, der die Diagonale FH im allgemeinen in J und J' trifft. Ziehe JK ($J'K'$) parallel mit FG, so ist EJK ($EJ'K'$) das gesuchte Dreieck.



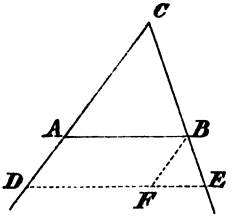
Beweis. Der Winkel JKE ist dem Winkel GFE, also auch dem gegebenen Winkel gleich, weil JK und FG parallel sind. Ferner ist $KJ = KF$, weil $KJF = GFJ = JFK$, folglich $EK + KJ = EF =$ der gegebenen Summe. Endlich ist $EJ =$ der gegebenen Seite. Ebenso beweist man, daß $EJ'K'$ den Forderungen der Aufgabe genügt.

Determination. Die Aufgabe ist lösbar, wenn die Diagonale FH von dem Kreise um E getroffen wird. Dies ist der Fall, wenn die gegebene Seite nicht kleiner ist, als die Normale aus E zu FH, d. h. nicht kleiner als die Hälfte der andern Diagonale EG.

Die beiden Auflösungen der Aufgabe sind nicht wesentlich verschieden. Denn im Rhombus $EFGH$ ist $EFJ \cong EHJ'$, also der Winkel $KEJ = J'EH = EJ'K'$. Nun haben die Dreiecke EJK und $EJ'K'$ eine Seite und zwei gleichliegende Winkel der Reihe nach gleich, also ist $EJK \cong J'EK'$.

Beispiel 2. Das Dreieck zu konstruieren, in welchem ein Winkel, die gegenüberliegende Seite und das Verhältnis der anliegenden Seiten gegeben sind.

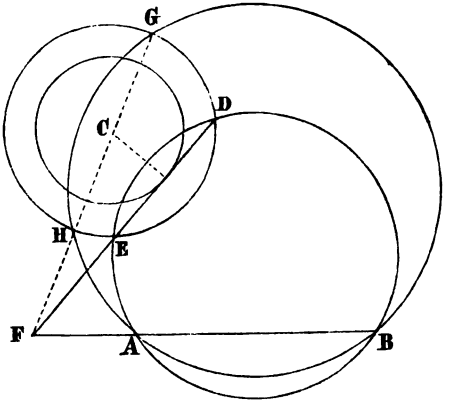
Analysis. Das gesuchte Dreieck sei ABC, der gegebene Winkel C, die gegebene Seite AB, das gegebene Verhältnis $BC : CA$. Wenn man durch einen beliebigen Punkt D der Geraden CA die mit AB parallele Gerade zieht, welche BC in E schneidet, so ist $EC : CD = BC : CA$ von gegebener Größe. Wenn man noch durch B die mit CA parallele Gerade zieht, welche DE in F schneidet, so ist $DF = AB$ von gegebener Größe. Man kann also aus den Daten die Hilfsfigur $CDEF$, und aus derselben das gesuchte Dreieck konstruieren.



Diese Aufgabe ist bei beliebigen Daten einfach auflösbar.

Beiſpiel 3. Gegeben zwei Punkte, ein Kreis und eine Sehne desſelben; geſucht wird ein Kreis, der durch die gegebenen Punkte geht und von dem gegebenen Kreiſe einen Bogen abſchneidet, deſſen Sehne der gegebenen Sehne gleich iſt.

Analyſis. Der geſuchte Kreis ſei *ABDE*, der durch die Punkte *A* und *B* geht und von dem Kreiſe (*C*) den Bogen *DE* abſchneidet. Die Sehnen des Kreiſes (*C*), welche *DE* gleich ſind, berühren einen concentriſchen Kreis, deſſen Radius der Abſtand des Punktes *C* von *DE* iſt. Die Sehnen *AB* und *DE* ſchneiden ſich in *F* ſo, daß $FA \cdot FB = FD \cdot FE$ iſt. Wenn nun eine durch *F* beliebig gezogene Gerade den gegebenen Kreis (*C*) in *G* und *H* ſchneidet, ſo iſt $FD \cdot FE = FG \cdot FH$, folglich auch $FA \cdot FB = FG \cdot FH$, d. h. *H* liegt auf dem Kreiſe *ABG*. Alſo kann man durch den Hilfskreis *ABG* den Punkt *F*, und durch eine beſtimmte Tangente des kleinern Kreiſes um *C* den geſuchten Kreis *ABD* finden.



Konſtruktion. Durch die gegebenen Punkte *A*, *B* und einen willkürlichen Punkt *G* des gegebenen Kreiſes (*C*) beſchreibe den Kreis *ABG*, der den Kreis (*C*) noch einmal in *H* trifft. Die Geraden *AB* und *GH* ſchneiden ſich in *F*. In dem Kreiſe (*C*) ziehe eine Sehne von der gegebenen Länge und den concentriſchen Kreis, welcher dieſe Sehne berührt. Durch *F* ziehe die Tangenten des concentriſchen Kreiſes, welche den Kreis (*C*) in *D* und *E*, *D'* und *E'* ſchneiden; ſo iſt ſowohl *ABD*, als auch *ABD'* der geſuchte Kreis.

Beweis. Die Sehne *DE* des Kreiſes (*C*) hat die geforderte Länge, weil ſie den concentriſchen Kreis berührt. Der Punkt *E* liegt auf dem Kreiſe *ABD*, weil $FA \cdot FB = FG \cdot FH$ am Kreiſe *ABGH*, $FG \cdot FH = FD \cdot FE$ am Kreiſe (*C*), folglich $FA \cdot FB = FD \cdot FE$ iſt. Ebenſo für *D'E'*.

Determination. Dieſe Aufgabe hat unter der Bedingung, daß *CF* größer iſt als der Radius des concentriſchen Hilfskreiſes, zwei

verschiedene Auflösungen, die nur dann sich nicht unterscheiden, wenn die gegebene Sehne ein Diameter ist, so daß der concentrische Kreis mit seinem Centrum zusammenfällt. Wenn insbesondere $AC = BC$, so werden die Sehnen AB, GH, DE, $D'E'$ parallel, ohne daß die Auflösungen wesentliche Veränderungen erleiden.

§. 4. Die Gleichungen.

(Bis §. 60—64.)

1. Identität, identische Gleichung*) heißt eine Gleichung (Allg. Arithm. §. 1), deren Seiten unbedingt gleich sind d. h. bei beliebigen Werten der darin vorkommenden Unbestimmten. Es ist z. B.

$$a + b = b + a$$
$$(a - b) + (b - c) + (c - a) = 0$$
$$(a + b)c = ac + bc$$
$$(a - b)c + (b - c)a + (c - a)b = 0$$

welche Werte auch die Unbestimmten a, b, c haben mögen. Jede Gleichung von Formeln, welche in der Arithmetik als richtig nachgewiesen wird, ist eine Identität.

Wenn bei gewissen Werten der Unbestimmten die eine Seite der Gleichung einen andern Wert hat, als die andere Seite, so ist die Gleichung nicht identisch. Die Gleichung $a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots = 0$ ist nur dann bei jedem beliebigen Wert von x richtig, also nur dann eine Identität, wenn $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, ... Wäre a von Null verschieden, so wäre $a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$ bei $x = 0$ von Null verschieden. Damit ferner

$$bx + cx^2 + dx^3 + \ldots = x(b + cx + dx^2 + \ldots)$$

bei jedem Wert von x verschwindet, muß $b + cx + dx^2 + \ldots$ bei jedem Wert von x verschwinden, mithin $b = 0$ sein, u. s. f.

2. Gleichung im engern Sinne (aequatio) heißt eine Gleichung, welche im allgemeinen nicht identisch ist, und deren Seiten einander gleich gesetzt worden sind, um eine darin vorkommende Unbestimmte,

*) Identitas von idem, lateinische Übersetzung von ταυτότης, Einerleiheit. Die in einigen Lehrbüchern vorkommende Benennung „analytische Gleichung" für Identität erscheint nach dem über die „analytische Methode" Bemerkten nicht angemessen.

die Unbekannte, zu bestimmen. Z. B. die Gleichung $4x + 3 = 23$ ist nicht identisch, weil $4x + 3$ im allgemeinen nicht 23 ist; durch die Gleichung hört die Unbestimmtheit von x auf, denn die Gleichung wird nur dann richtig (identisch), wenn die Unbekannte x den Wert 5 erhält.

Ein Wert der Unbekannten, welcher der Gleichung genügt, d. h. die Gleichung identisch macht (verificiert), heißt eine Wurzel der Gleichung. Auch die Wurzeln von Zahlen sind Wurzeln von Gleichungen, z. B. $\sqrt[n]{a}$ ist eine Wurzel der Gleichung $x^n = a$ für die Unbekannte x. Eine Gleichung für die Unbekannte auflösen heißt die Wurzeln der Gleichung angeben.

Wenn $ax + b = 0$ sein soll, so ist $ax = -b$, $x = -b : a$, d. h. die Gleichung $ax + b = 0$ für die Unbekannte x hat die Wurzel $-b : a$. Ein Produkt kann nur dann verschwinden, wenn ein Faktor desselben verschwindet. Vergl. Allg. Arithm. §. 11, 8. Der Gleichung

$$(ax + b)(cx - d) = 0$$

für die Unbekannte x wird daher sowohl durch die Gleichung $ax + b = 0$, also auch durch die Gleichung $cx - d = 0$ genügt, d. h. die Wurzeln der gegebenen Gleichung sind $-b : a$ und $d : c$, die Unbekannte x ist durch diese Gleichung zweideutig bestimmt.

Eine Identität ist apodiktisch (demonstrativ), d. h. eine Seite derselben ist der andern gleich bei beliebigen Werten der Unbestimmten. Eine Gleichung ist hypothetisch (problematisch), d. h. eine Seite ist der andern gleich, wenn die Unbekannte einen bestimmten Wert hat.

3. Aus einer gegebenen Gleichung, sie mag identisch sein oder nicht, kann man kongruente Gleichungen d. h. von derselben Bedeutung ableiten, indem man auf beiden Seiten dieselben arithmetischen Operationen ausführt.

I. Man kann ein Glied der einen Seite auf die andere Seite mit dem entgegengesetzten Zeichen setzen d. h. dieses Glied auf beiden Seiten addieren oder subtrahieren. Z. B. aus der Gleichung

$$ax + b = c - dx$$

folgt

$$ax + dx = c - b$$

Insbesondere kann man die Gleichung auf Null reducieren d. h. alle Glieder der einen Seite auf die andere Seite versetzen. Man kann die Zeichen aller Glieder verändern. Z. B. die Gleichungen

$$a - \frac{x}{b} = \frac{x}{c} - d$$

$$a - \frac{x}{b} - \frac{x}{c} + d = 0$$

$$\frac{x}{b} + \frac{x}{c} - a - d = 0$$

sind kongruent und können einander vertreten. Wenn eine von ihnen identisch ist, so sind auch die andern identisch. Eine Wurzel der einen ist auch eine Wurzel der andern.

II. Man kann alle Glieder einer Gleichung mit derselben Zahl (ausgenommen 0 und ∞) multiplicieren oder dividieren. Wenn gebrochene Glieder vorhanden sind, so findet man durch Multiplikation mit dem kleinsten Generalnenner eine Gleichung, welche an die Stelle der gegebenen Gleichung gesetzt werden kann. Kongruente Gleichungen sind z. B.

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0 \text{ und } ax^2 + bx + c = 0$$

vorausgesetzt daß a nicht 0 ist;

$$\frac{x}{b-x} + \frac{x}{c} + a = 0 \text{ und } cx + (b-x)x + ac(b-x) = 0$$

denn der Multiplikator $c(b-x)$, durch welchen die gegebene Gleichung in die abgeleitete übergeht, ist null bei $x = b$, welcher Wert von x der gegebenen Gleichung nicht genügt;

$$\frac{1}{x} - \frac{1-x}{x(1+x)} + 3 = 0 \text{ und } 5 + 3x = 0$$

denn der Multiplikator $1 + x$ ist null bei dem der gegebenen Gleichung nicht genügenden Wert -1 der Unbekannten. Nicht kongruent sind

$$ax^3 + bx^2 + cx = 0 \text{ und } ax^2 + bx + c = 0$$

weil $x = 0$ der einen Gleichung genügt, der andern nicht genügt.

III. Man kann jede Seite der Gleichung mit derselben Zahl potenzieren, eine Zahl mit jeder Seite potenzieren, dieselbe Wurzel und denselben Logarithmus jeder Seite nehmen. Kongruent sind z. B.

$$\sqrt[n]{a + bx} = c \text{ und } a + bx = c^n$$

$$\log. \text{nat.}(a + bx) = c \text{ und } a + bx = e^c$$

unter der Voraussetzung, daß die Wurzel und der Logarithmus nicht mehr Deutungen erhalten als c,

$$(a + bx)^m = c \text{ und } a + bx = \sqrt[m]{c}$$

$$a^{b+cx} = d \text{ und } b + cx = \log d : \log a$$

Dagegen haben die Gleichungen

$$(a + bx)^m = (c + dx)^m, \quad e^{a+bx} = e^{c+dx}$$

einen weitern Umfang als die Gleichung $a + bx = c + dx$, u. s. w.

Die unter (I) gezeigten Umgestaltungen einer Gleichung wurden nach der Ausdrucksweise der arabischen Mathematiker*) Algebra et Almocabala (restitutio et oppositio) genannt. Daher kommt der Gebrauch des Wortes Algebra im weitern Sinne für allgemeine Arithmetik (Buchstabenrechnung), im engern und gewöhnlichen Sinne für die Lehre von den nicht identischen Gleichungen, genauer von den algebraischen Gleichungen und Funktionen (§. 2, 6 ff.).

4. Um die Art einer gegebenen Gleichung zu bestimmen, muß man die Gleichung ordnen in Bezug auf eine Unbestimmte (die Unbekannte). Wenn in der Gleichung nur rationale Funktionen der Unbestimmten vorkommen (§. 2, 7), so hat man (3)

die Gleichung auf Null zu reducieren,
die Divisoren zu entfernen, in denen die Unbestimmte vorkommt,
die Parenthesen aufzulösen, in denen die Unbestimmte vorkommt,
die Glieder zusammenzufassen, welche die Unbestimmte in 0ter, 1ter, 2ter, . . Potenz enthalten.

Wenn auch die andere Seite der geordneten Gleichung den Wert Null hat, so ist die gegebene Gleichung eine Identität (1).

Die gegebene Gleichung ist nicht identisch und heißt eine Gleichung $m$ten Grades für die Unbekannte, wenn in der geordneten Gleichung die Unbekannte mit dem Exponenten m, aber nicht mit einem größern als m vorkommt, wenn also eine Seite der geordneten Gleichung Null, die andre Seite eine ganze Funktion der Unbekannten vom $m$ten Grade ist (§. 2, 6). Die Gleichungen 2ten, 3ten, 4ten Grades in Bezug auf eine Unbekannte heißen quadratisch, kubisch, biquadratisch. Die geordnete Gleichung heißt rein (pura, binomisch), wenn sie nicht mehr als ein unbekanntes Glied (eine Potenz der Unbekannten) enthält; in jedem andern Fall wird sie unrein, gemischt (affecta, trinomisch, polynomisch) genannt.

Die Gleichung $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ist für die Unbekannte x^2 vom 2ten Grade. Die Gleichung $a + b\sqrt[3]{x} + c\sqrt[3]{x^2} + dx = 0$ ist für die Unbekannte $\sqrt[3]{x}$ vom dritten Grade.

*) Vergl. Nesselmann Geschichte der Algebra p. 40 ff. Noch heute heißt bei den Spaniern der Chirurgus algebrista.

Eine reine Gleichung wird aufgelöst, indem man das unbekannte Glied auf eine Seite absondert und den Coefficienten der Unbekannten durch Division entfernt. Wenn z. B. $ax^m + b = 0$, so ist

$$ax^m = -b, \quad x^m = -\frac{b}{a}, \quad x = \sqrt[m]{-\frac{b}{a}}$$

Die Gleichung $a(x-b)(x+c) = 0$ für x heißt reducibel, weil sie aus den Gleichungen $x - b = 0$, $x + c = 0$ besteht (2).

Die Gleichung $a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ für x erhält die Wurzel 0 oder ∞, wenn a_0 oder a_m null wird. Denn der gegebenen Gleichung wird unter der Bedingung $a_0 = 0$ durch $x = 0$ genügt. Dagegen hat man

$$a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots = x^m\left(a_m + \frac{a_{m-1}}{x} + \ldots\right)$$

Das eingeschlossene Polynomium hat bei hinreichend großem x von a_m eine beliebig kleine Differenz, und ist beliebig klein unter der Bedingung $a_m = 0$.

5. Wenn in der gegebenen Gleichung unbekannte Wurzeln (irrationale algebraische Funktionen der Unbekannten §. 2, 8) vorkommen, so kann die Gleichung ebenfalls nach Potenzen der Unbekannten mit ganzen Exponenten geordnet werden. Wenn nicht verschiedene Potenzen der Wurzel vorkommen, so gelingt diese Umgestaltung durch Potenzierung, nachdem eine Wurzel auf eine Seite der Gleichung abgesondert worden ist. Z. B.

$$\sqrt[4]{x^3} + \sqrt{x} = a \quad \text{oder} \quad \sqrt[4]{x^3} = a - \sqrt{x}$$

giebt quadriert, weil die 4te Wurzel 4deutig ist,

$$+ x\sqrt{x} = a^2 - 2a\sqrt{x} + x \quad \text{oder} \quad (\pm x + 2a)\sqrt{x} = a^2 + x$$

Durch Quadrieren entsteht die Gleichung

$$x^3 - (1 \pm 4a)x^2 + 2a^2x - a^4 = 0$$

Bei einer algebraischen Formel, welche verschwinden soll, ist ihre Mehrdeutigkeit zu beachten. Es läßt sich beweisen, daß das Produkt der konjugierten Werte, welche die algebraische Formel hat, rational ist, die Norm der algebraischen Formel (Allg. Arithm. §. 16, 7. Vergl. unten §. 10). Z. B. die Formel $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ hat 8 Werte, welche aber paarweise entgegengesetzt gleich sind. Das Produkt der 4 verschiedenen Werte

$$(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})(-\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})(\sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r})(\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r})$$

beträgt $2pq + 2pr + 2qr - p^2 - q^2 - r^2$. Wenn nun p, q, r rationale Funktionen einer Unbekannten sind, so ist die Gleichung

$$\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = 0$$

kongruent mit der Gleichung

$$2pq + 2pr + 2qr - p^2 - q^2 - r^2 = 0$$

6. Überhaupt läßt sich eine nicht identische Gleichung als die Forderung betrachten, daß eine bestimmte Funktion der Unbekannten null sein soll*). Eine nicht identische Gleichung heißt algebraisch oder transscendent, je nachdem die Funktion der Unbekannten, welche der Null gleichgesetzt wird, algebraisch ist oder transscendent (§. 2, 8). Jede algebraische Gleichung aber kann (5) als die Forderung betrachtet werden, daß eine bestimmte ganze Funktion der Unbekannten null sein soll.

§. 5. Systeme von Gleichungen mit mehreren Unbekannten, insbesondere von linearen Gleichungen.

(Bels §. 65—68.)

1. Durch die Forderung, daß mehrere Unbestimmte einer (nicht identischen) Gleichung genügen sollen, ist die unendliche Mannigfaltigkeit der Werte von einer unter ihnen beschränkt, von den übrigen unbeschränkt. Jede der Unbestimmten kann als eine Unbekannte betrachtet werden, welche durch die Gleichung bestimmt ist (§. 4, 2). Eine Gleichung mit mehreren Unbekannten heißt unbestimmt (indeterminata), weil sie eine der Unbekannten verschieden bestimmt je nach den Werten, welche den übrigen Unbekannten beliebig erteilt werden. Ein System von Werten aller Unbekannten ($x = a$, $y = b$, . .), welche der Gleichung genügen, heißt eine Lösung (solutio) der unbestimmten Gleichung.

Eine unbestimmte Gleichung heißt algebraisch, wenn sie in Bezug auf jede Unbekannte algebraisch ist; transscendent, wenn sie in Bezug auf eine Unbekannte transscendent ist. Jede algebraische unbestimmte Gleichung kann als die Forderung dargestellt werden, daß eine bestimmte ganze Funktion der Unbekannten null sein soll (§. 4, 6); der Grad derselben wird nach der höchsten Anzahl von unbekannten Faktoren bestimmt, die in einem Gliede der Gleichung vorkommen

*) Geläufiger wurde diese Ansicht durch Descartes Géom. III. Früher pflegte man das bekannte Glied (homogeneum comparationis bei Vieta) abzusondern.

(§. 4, 4 und §. 2, 6). Die unbestimmten Gleichungen ersten, zweiten, dritten, vierten Grades heißen linear, quadratisch, kubisch, biquadratisch.

2. Wenn A, B, .. dieselben Unbekannten enthalten, so ist eine Lösung der unbestimmten Gleichung $A = 0$ im allgemeinen keine Lösung von $B = 0$. Eine gemeinschaftliche Lösung der Gleichungen $A = 0$ und $B = 0$ heißt eine Lösung des Systems von Gleichungen $A = 0$, $B = 0$. Zwei Systeme sind kongruent, wenn jede Lösung des einen Systems eine Lösung des andern ist.

Eine Lösung des Systems $A = 0$, $B = 0$ ist auch eine Lösung der komponierten Gleichung $\alpha A + \beta B = 0$ bei beliebigen Multiplikatoren α, β. Eine Lösung des Systems $A = 0$, $\alpha A + \beta B = 0$ ist eine Lösung von $\beta B = 0$, d. h. von $B = 0$, wenn β nicht null. Das komponierte System $\alpha A + \beta B = 0$, $\alpha' A + \beta' B = 0$ ist mit dem System $A = 0$, $B = 0$ kongruent, wenn $\alpha\beta' - \alpha'\beta$ nicht null; denn eine Lösung des komponierten Systems ist eine Lösung sowohl von $\beta'(\alpha A + \beta B) - \beta(\alpha A + \beta' B) = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)A = 0$, als auch von $(\alpha\beta' - \alpha'\beta)B = 0$.

Es kann sich ereignen, daß eine komponierte Gleichung 1) eine oder mehrere der Unbekannten nicht enthält, 2) daß sie keine derselben enthält, 3) daß sie eine Identität ist.

3. Aus 2 Gleichungen eines Systems eine Unbekannte eliminieren (nach Euler, exterminieren bei Newton) heißt aus den Gleichungen durch geeignete Multiplikatoren eine Gleichung komponieren (2), welche diese Unbekannte nicht enthält.

Wenn beide Gleichungen in Bezug auf die zu eliminierende Unbekannte ersten Grades sind, so multipliciert man die erste Gleichung mit dem Coefficienten der Unbekannten in der zweiten Gleichung, die zweite Gleichung mit dem negativen Coefficienten der Unbekannten in der ersten Gleichung, und findet aus den multiplicierten Gleichungen durch Addition die gesuchte Gleichung. Haben die erwähnten Coefficienten einen gemeinschaftlichen Divisor, so genügen als Multiplikatoren die Quotienten der Coefficienten durch den gemeinschaftlichen Divisor. Um aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} 6x + 5y - 7 &= 0 \\ -9x + 2y + 3 &= 0 \end{aligned}$$

y zu eliminieren, multipliciert man die erste mit 2, die zweite mit -5, und findet durch Addition $57x - 29 = 0$; um x zu eliminieren,

multipliciert man die erste mit 3, die zweite mit 2, und findet durch Addition $19y - 15 = 0$. Um x aus den Gleichungen

$$ax + B = 0$$
$$cx + D = 0$$

zu eliminieren, multipliciert man die erste mit c, die zweite mit $-a$ und findet durch Addition $Bc - aD = 0$, die Bedingung, unter der die zweite Gleichung mit der ersten kongruent ist.

Aus dem System $x + y = a$, $x - y = b$ folgt durch Addition $2x = a + b$, durch Subtraktion $2y = a - b$; das komponierte System ist mit dem gegebenen System kongruent und liefert die Lösung desselben $x = \frac{1}{2}(a + b)$, $y = \frac{1}{2}(a - b)$.

Aus dem System $x : y = a$, $xy = b$, folgt durch Multiplikation $x^2 = ab$, zum Ersatz für die zweite Gleichung. Aus dem System $x^2 - y^2 = a$, $x + y = b$ findet man durch Division die Gleichung $x - y = a : b$, welche nur zum Teil die erste Gleichung vertritt; es genügen dem System auch entgegengesetzt gleiche unendliche Werte von x und y.

4. Wenn eine aus m Gleichungen des gegebenen Systems komponierte Gleichung eine Identität ist, so ist eine gemeinschaftliche Lösung von je $m - 1$ unter diesen Gleichungen auch eine Lösung der $m$ten Gleichung. Wenn z. B. $\alpha A + \beta B + \gamma C = 0$ eine Identität ist, so ist bei allen Werten der Unbekannten

$$C = -\frac{\alpha}{\gamma}A - \frac{\beta}{\gamma}B$$

Neben den Gleichungen $A = 0$, $B = 0$ ist die Gleichung $C = 0$ überflüssig, die Gleichungen des Systems $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ sind nicht unabhängig von einander.

Wenn aber in der komponierten Gleichung nur die Coefficienten aller Unbekannten null sind, so genügen dem gegebenen System nicht endliche, sondern unendliche Werte der Unbekannten. Z. B. aus dem System

$$x + y = a, \quad mx + my = b$$

findet man $0x + 0y = ma - b$. Unter der Bedingung $ma - b = 0$ ist diese Gleichung identisch, und die zweite Gleichung des Systems überflüssig. Wenn $ma - b$ nicht null ist, so setze man $x = u : t$, $y = v : t$. Aus dem System

$$u + v = at, \quad mu + mv = bt$$

folgt $0 = (ma - b)t$, d. h. $t = 0$, $u + v = 0$. Also genügen dem gegebenen System unendliche Werte von x und y, welche entgegengesetzt gleich sind.

Das System

$$\begin{aligned} -x + 2y - 3z &= 18 \\ 2x + 3y + 5z &= 24 \\ x + 5y + 2z &= 43 \end{aligned}$$

ist bei endlichen x, y, z unmöglich, weil durch Addition der beiden ersten Gleichungen $x + 5y + 2z = 42$ gefunden wird, im Widerspruch gegen die dritte Gleichung. Diesem System genügen unendliche x, y, z, die sich verhalten wie $-19 : 1 : 7$, entsprechend dem System

$$\begin{aligned} -x + 2y - 3z &= 0 \\ 2x + 3y + 5z &= 0 \\ x + 5y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

von welchem eine Gleichung überflüssig ist.

Das System

$$\begin{aligned} * \quad cy - bz &= f \\ -cx \quad * + az &= g \\ bx - ay \quad * &= h \end{aligned}$$

ist für endliche x, y, z nur dann möglich, wenn $af + bg + ch = 0$. Unter dieser Bedingung ist eine der Gleichungen aus den beiden andern ableitbar, mithin das System unbestimmt.

5. Durch n von einander unabhängige Gleichungen werden ebensoviel Unbekannte derselben bestimmt; unter Voraussetzung der erforderlichen Eliminationen wird die Lösung des gegebenen Systems durch Wurzeln von Gleichungen eindeutig oder mehrdeutig gefunden.

Aus 2 Gleichungen für die Unbekannten x, y findet man durch Elimination von y eine Gleichung für x, durch welche x bestimmt wird. Demnach hören die gegebenen Gleichungen auf unbestimmt zu sein, und y wird durch eine derselben bestimmt. Wenn 3 Gleichungen für die Unbekannten x, y, z gegeben sind, so eliminiert man z aus 2 Paaren, und findet 2 Gleichungen für x, y. U. s. w.

Überhaupt hat man ein resolvierendes System zu komponieren, welches mit dem gegebenen System kongruent ist. Die erste Gleichung desselben enthält nur eine Unbekannte und bestimmt dieselbe; die zweite Gleichung enthält außer der ersten Unbekannten nur eine zweite, ist für die zweite niederſten Grades und bestimmt die zweite Unbekannte durch die erste; die dritte Gleichung enthält außer den 2 ersten Unbekannten nur eine dritte, ist für die dritte niederſten Grades und bestimmt die dritte Unbekannte durch die 2 ersten; u. s. w.

Wenn die Gleichungen mit n Unbekannten von einander unabhängig

sind, so ist ein System von n Gleichungen **bestimmt**, von $n - k$ Gleichungen k**fach unbestimmt**, von mehr als n Gleichungen **unmöglich** (auch imaginäre oder komplexe Lösungen ausschließend).

6. Um ein **lineares System** d. h. ein System linearer Gleichungen aufzulösen, wenn die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten eine gemeine Zahl ist, bildet man durch Elimination von Unbekannten Systeme von weniger Unbekannten, bis man zu einer Gleichung mit einer Unbekannten gelangt. Den gefundenen Wert dieser Unbekannten substituiert man in einer Gleichung des zunächst voranstehenden Systems, um eine andere Unbekannte zu berechnen; die gefundenen Werte werden zur Berechnung einer dritten Unbekannten gebraucht, u. s. w.

Beispiel 1.

$$\begin{array}{rcrcrcl|l|l}
5x & - & 3y & + & 2z & = & 4 & + & \\
x & + & 4y & - & z & = & 3\tfrac{1}{6} & 2 & + \\
2x & - & 3y & + & z & = & \tfrac{1}{2} & & + \\
\hline
7x & + & 5y & & & = & 10\tfrac{1}{3} & - & \\
3x & + & y & & & = & 3\tfrac{2}{3} & 5 & \\
\hline
8x & & & & & = & 8, & x = 1 & \\
 & & y & & & = & \tfrac{2}{3} & & \\
 & & & & z & = & \tfrac{1}{2} & &
\end{array}$$

Man findet 2 Gleichungen für x und y, indem man z aus den beiden ersten und aus den beiden letzten Gleichungen des Systems eliminiert. Dazu genügt es, die zweite Gleichung mit 2 multipliciert zur ersten zu addieren, und die dritte Gleichung zur zweiten zu addieren. Aus dem komponierten System findet man eine Gleichung für x, indem man y aus den beiden Gleichungen dieses Systems eliminiert. Nachdem man x gefunden hat, findet man $y = 3\frac{2}{3} - 3x$, und endlich $z = \frac{1}{2} - 2x + 3y$.

Beispiel 2.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl|l}
5u & - & 4x & & . & & . & = & 4 & - 3 \\
3u & + & 4x & + & 5y & & . & = & 27 & 5 \\
. & & 2x & + & 3y & + & 4z & = & 14 & + \\
. & & . & & 3y & - & 4z & = & 7 & + \\
\hline
. & & 32x & + & 25y & & . & = & 123 & - \\
. & & 2x & + & 6y & & . & = & 21 & 16 \\
\hline
. & & . & & 71y & & . & = & 213, & y = 3 \\
. & & 2x & & . & & . & = & 3, & x = \tfrac{3}{2} \\
. & & . & & . & & 4z & = & 2, & z = \tfrac{1}{2} \\
5u & & . & & . & & . & = & 10, & u = 2
\end{array}$$

In besonderen Fällen kann man das gegebene System vereinfachen, indem man gewisse Funktionen der Unbekannten z. B. die Summe, die Reciproken der Unbekannten u. dgl. als neue Unbekannte einführt (substituiert). Nach Berechnung der neuen Unbekannten aus dem vereinfachten System findet man aus dem System der gemachten Substitutionen die Unbekannten des gegebenen Systems.

7. Ein allgemeines System von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten enthält n^2 Coefficienten der Unbekannten und n gegebene Glieder. Wenn i, k Zahlen aus der Reihe 1, 2, .., n bedeuten, wenn man die Unbekannten durch x_1, x_2, .., x_n, wenn man in der $i$ten Gleichung den Coefficienten von x_k durch a_{ik} und das gegebene Glied durch u_i bezeichnet, wenn also das System

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + .. + a_{1n}\,x_n &= u_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + .. + a_{2n}\,x_n &= u_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \quad \cdot\ \cdot\ \cdot \quad \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + .. + a_{nn}\,x_n &= u_n \end{aligned}$$

gegeben ist, so bilde man die Determinanten $n$ten und $(n-1)$ten Grades der Coefficienten (Allg. Arithm. §. 26)

$$R = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} a_{11} & .. & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & .. & a_{nn} \end{matrix}.$$

Wenn nun R nicht null ist, so multipliciert man die gegebenen Gleichungen der Reihe nach mit den Adjunkten der $k$ten Kolonne und findet durch Addition*)

$$Rx_k = u_1 a_{1k} + u_2 a_{2k} + .. + u_n a_{nk}$$

Denn in der Summe hat x_i den Coefficienten

$$a_{1i} a_{1k} + a_{2i} a_{2k} + .. + a_{ni} a_{nk}$$

welcher R oder 0 ist, je nachdem i und k gleich sind oder ungleich. Der für Rx_k gefundene Ausdruck ist die Determinante des Systems, welches aus dem System der Coefficienten dadurch entspringt, daß man die $k$te Kolonne durch u_1, .., u_n ersetzt.

8. I. Das homogene lineare System, welchem ein nicht homogenes lineares System untergeordnet ist (§. 2, 9),

$$u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ ..,\ u_n = 0 \quad (7)$$

hat, wenn die Determinante $R = \Sigma \pm a_{11} .. a_{nn}$ nicht null ist, nur

*) Diese Auflösung ist von Leibniz und zum zweitenmale von Cramer (1750) erfunden worden. Vergl. die Schrift des Verf. über Determinanten §. 8.

die eine Lösung $x_1 = 0, .., x_n = 0$. Denn bei allen $x_1, x_2, ..$ ist die Determinante $n$ten Grades

$$\begin{vmatrix} u_1 & a_{12} & a_{13} & . \\ u_2 & a_{22} & a_{23} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + .. & a_{12} & a_{13} & . \\ a_{21}x_1 + .. & a_{22} & a_{23} & . \\ . . & . & . & \end{vmatrix}$$

d. i. $b_1 u_1 + b_2 u_2 + .. = Rx_1$

durch Entwickelung nach der ersten Kolonne einerseits, und durch Zerteilung der ersten Kolonne andrerseits (Allg. Arithm. §. 26, 9). Zufolge des gegebenen Systems ist $0 = Rx_1$, also $x_1 = 0$, weil R nicht null. U. s. w.

Wenn aber $R = 0$, so ist $b_1 u_1 + b_2 u_2 + .. = 0$, mithin eine der n Gleichungen des Systems überflüssig. Wenn z. B. b_1 nicht null, so ist die Gleichung $u_1 = 0$ neben den folgenden Gleichungen überflüssig.

II. Wenn z. B. die erste Gleichung überflüssig ist, so bildet man die Determinante $(n - 1)$ten Grades

$$\begin{vmatrix} u_2 & a_{23} & a_{24} & . \\ u_3 & a_{33} & a_{34} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21}x_1 + .. & a_{23} & a_{24} & . \\ a_{31}x_1 + .. & a_{33} & a_{34} & . \\ . . & . & . & \end{vmatrix}$$

d. i. $c_2 u_2 + c_3 u_3 + .. = R_1 x_1 + R_2 x_2$

und findet zufolge des Systems $0 = R_1 x_1 + R_2 x_2$ für x_2 bei unbestimmten x_1, wenn R_1, R_2 nicht beide null sind. U. s. w.

Wenn aber R_1, R_2 beide null sind, so ist $c_2 u_2 + .. = 0$. Also ist eine der $n - 1$ Gleichungen überflüssig. Wenn z. B. c_2 nicht null, so ist nun auch die Gleichung $u_2 = 0$ neben den folgenden Gleichungen überflüssig.

III. Wenn die beiden ersten Gleichungen überflüssig sind, so bildet man in gleicher Weise die Determinante $(n - 2)$ten Grades

$$d_3 u_3 + d_4 u_4 + .. = S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3$$

und findet dem System genügend $0 = S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3$ für x_3 bei unbestimmten x_1, x_2, wenn S_1, S_2, S_3 nicht alle null sind. U. s. w.

9. I. Wenn von 3 homogenen Gleichungen für x_1, x_2, x_3 die 2 Gleichungen

$$a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 = 0$$
$$a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = 0$$

übrig geblieben sind, so ist

$$\begin{vmatrix} a_1x_1 + c_1x_3 & b_1 \\ a_2x_1 + c_2x_3 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} x_3 = 0$$

u. ſ. w. Alſo hat das Syſtem die Löſung

$$x_1 : x_2 : x_3 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Die Unbekannten verhalten ſich wie die Adjunkten der letzten Zeile von

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

vorausgeſetzt, daß die Adjunkten nicht alle null ſind.

II. Wenn von 4 Gleichungen für x_1, x_2, x_3, x_4 die 2 Gleichungen

$$a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1x_4 = 0$$
$$a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2x_4 = 0$$

übrig bleiben, ſo iſt z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1x_1 + b_1x_2 + d_1x_4 & c_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + d_2x_4 & c_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1x_1 + b_1x_2 & c_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & c_1 \\ d_2 & c_2 \end{vmatrix} x_4 = 0$$

u. ſ. w. Alſo hat das Syſtem die Löſung

$$1 : x_3 : x_4 = \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} d_1 & a_1x_1 + b_1x_2 \\ d_2 & a_2x_1 + b_2x_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1x_1 + b_1x_2 & c_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

d. h. $1 : x_3 : x_4$ verhalten ſich wie die Adjunkten der letzten Zeile von

$$\begin{vmatrix} a_1x_1 + b_1x_2 & c_1 & d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 & c_2 & d_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

während x_1, x_2 unbeſtimmt bleiben; vorausgeſetzt, daß die in Betracht kommenden Subdeterminanten 2ten Grades nicht alle null ſind.

III. Wenn von den 4 Gleichungen die 3 Gleichungen

$$a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1x_4 = 0$$
$$a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2x_4 = 0$$
$$a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 + d_3x_4 = 0$$

übrig bleiben, ſo iſt z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1x_1 + d_1x_4 & b_1 & c_1 \\ a_2x_1 + d_2x_4 & b_2 & c_2 \\ a_3x_1 + d_3x_4 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

abgekürzt $(abc)x_1 + (dbc)x_4 = 0$, u. ſ. w. Alſo hat das Syſtem die Löſung

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = (bcd) : -(acd) : (abd) : -(abc)$$

Die Unbekannten verhalten sich wie die Adjunkten der letzten Zeile von $(abcd)$. U. s. w. Über die Adjunkten einer Kolonne oder einer Zeile vergl. Allg. Arithm. §. 26, 11.

§. 6. Die quadratischen Gleichungen.

(Seit 88. 69—76.)

1. Eine quadratische Gleichung mit einer Unbekannten (§. 4, 4) hat im allgemeinen 3 Glieder, welche die Unbekannte in zweiter Potenz, in erster Potenz und gar nicht enthalten. Daher ist die allgemeine Formel einer quadratischen Gleichung für die Unbekannte x

$$ax^2 + bx + c = 0$$

wenn die Coefficienten a, b, c beliebige von x unabhängige Zahlen bedeuten.

In dem besondern Falle $c = 0$ verschwindet $ax^2 + bx$ oder $x(ax + b)$ sowohl, wenn der eine Faktor x verschwindet, als auch wenn der andere Faktor $ax + b$ verschwindet, d. h. wenn $x = 0$ und wenn $x = -b : a$. Also hat die Gleichung $ax^2 + bx = 0$ die beiden verschiedenen Wurzeln 0 und $-b : a$.

In dem besondern Falle $b = 0$ ist die quadratische Gleichung rein (§. 4, 4). Durch Umstellung, Division und Radicierung erhält man

$$ax^2 = -c, \quad x^2 = -\frac{c}{a}, \quad x = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Die Quadratwurzel kann sowohl positiv als auch negativ genommen werden (Allg. Arithm. §. 16, 8). Also hat die reine quadratische Gleichung $ax^2 + c = 0$ zwei entgegengesetzt gleiche (reale oder imaginäre) Wurzeln.

2. Die Formel $ax^2 + bx + c$ (eine quadratische Funktion von x, §. 2, 6) kann unter Anwendung eines geeigneten Multiplikator durch 2 Glieder dargestellt werden, deren erstes ein von x abhängiges positives Quadrat, deren zweites von x unabhängig ist*). Z. B.

*) Dieser wesentlichste Schritt zur Auflösung der quadratischen Gleichungen ist in Euclids Elem. II, 6 angezeigt.

$3x^2 + 4x - 7$ wird nach Multiplikation mit 3 durch $(3x + 2)^2 - 25$ ausgedrückt, indem man 2^2 addiert und subtrahiert.

$-3x^2 + 5x - 7$ wird nach Multiplikation mit $-3 \cdot 4$ durch $(6x - 5)^2 + 59$ ausgedrückt, indem man 5^2 addiert und subtrahiert.

$ax^2 + bx + c$ wird nach Multiplikation mit $4a$ ausgedrückt durch $(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac$, indem man b^2 addiert und subtrahiert.

Daher ist die allgemeine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ kongruent mit $(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0$ oder

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac, \quad 2ax + b = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Der zweite Ausdruck, welcher bei kleinen a gebraucht wird, entsteht aus dem ersten, wenn man den Zähler und den Nenner desselben mit $b + \sqrt{b^2 - 4ac}$ multipliciert, in Betracht daß

$$(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(b + \sqrt{b^2 - 4ac}) = -b^2 + (b^2 - 4ac) = -4ac$$

Die Quadratwurzel ist zweideutig, und zwar real oder imaginär, je nachdem der Radikandus positiv oder negativ ist (Allg. Arithm. §. 16, 6). Also hat die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ zwei Wurzeln, welche bei realen a, b, c

real verschieden sind, wenn $b^2 - 4ac$ positiv,
real gleich " " " " null,
komplex konjugiert " " " " negativ.

Wenn a null ist, so hat eine Wurzel den Wert $-c : b$, die andre ist unendlich (§. 4, 4).

Die Formel $b^2 - 4ac$, deren Vergleichung mit 0 hierbei entscheidend ist, heißt bei den Neuern die Diskriminante der betrachteten quadratischen Gleichung. Wenn a und c entgegengesetzt sind, so ist $4ac$ negativ, $-4ac$ positiv, also auch $b^2 - 4ac$ positiv, folglich hat die Gleichung reale verschiedene Wurzeln.

Bemerkenswert ist die Summe und das Produkt der Wurzeln der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{c}{a}$$

Man kann also die Summe, das Produkt und die Zeichen der Wurzeln einer quadratischen Gleichung angeben, ohne die Wurzeln selbst zu berechnen.

3. Die Wurzeln einer quadratischen Gleichung können auch goniometrisch ausgedrückt werden. Wenn a, b, c positive Zahlen bedeuten, so hat die Gleichung

$ax^2 + bx - c = 0$ die realen Wurzeln $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$

$ax^2 + bx + c = 0$ die realen Wurzeln $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

oder die komplexen Wurzeln $\dfrac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$

Für alle Fälle berechne man $\sqrt{c : a} = r$, so daß $ac = a^2r^2$.

In dem ersten Falle setze man $b = 2ar\cot\omega$. Dadurch findet man die Wurzeln

$$r(-\cot\omega \pm \sqrt{\cot^2\omega + 1}) = r\,\frac{-\cos\omega \pm 1}{\sin\omega}$$

d. i. $r\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\omega$ und $-r\cot\frac{1}{2}\omega$, während $\mathrm{tang}\,\omega = 2ar : b$.

In dem zweiten Falle setze man $b = \dfrac{2ar}{\sin\omega}$. Dadurch findet man die Wurzeln

$$r\left(-\frac{1}{\sin\omega} \pm \sqrt{\frac{1}{\sin^2\omega} - 1}\right) = r\,\frac{-1 \pm \cos\omega}{\sin\omega}$$

d. i. $-r\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\omega$ und $-r\cot\frac{1}{2}\omega$, während $\sin\omega = 2ar : b$.

In dem dritten Falle setze man $b = 2ar\cos\omega$. Daher findet man die Wurzeln

$$r(-\cos\omega \pm i\sin\omega), \text{ während } \cos\omega = b : 2ar$$

Die Wurzeln der Gleichung $ax^2 - bx \pm c = 0$ sind den Wurzeln der Gleichung $ax^2 + bx \pm c = 0$ entgegengesetzt gleich.

Einfacher kann man nach Gauß die Logarithmen der realen Wurzeln einer quadratischen Gleichung aus den Logarithmen der Coefficienten der Gleichung durch logarithmische Hilfstabellen berechnen (Vegas Sammlung mathematischer Tafeln von Hülße 1840).

4. Die quadratische Funktion $ax^2 + bx + c$ ist 2mal null bei den Werten α, β von x, welche die Wurzeln der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ sind, und wird bei beliebigen x durch das Produkt $a(x - \alpha)(x - \beta)$ ausgedrückt, so daß $\alpha + \beta = -b : a$, $\alpha\beta = c : a$.

Beweis. Nach der Voraussetzung ist $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, folglich

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + bx + c - (a\alpha^2 + b\alpha + c)$$
$$= a(x^2 - \alpha^2) + b(x - \alpha) = (x - \alpha)(ax + a\alpha + b)$$

d. h. teilbar durch $x - \alpha$. Ebenso erkennt man, daß $ax^2 + bx + c$ durch $x - \beta$ teilbar ist. Bezeichnet man durch q den Quotienten

$$(ax^2 + bx + c) : (x - \alpha)(x - \beta)$$

so fordert die Identität (§. 4, 1)

$$ax^2 + bx + c = q(x - \alpha)(x - \beta) = qx^2 - (\alpha + \beta)qx + \alpha\beta q$$

daß $q = a$, $(\alpha + \beta)q = -b$, $\alpha\beta q = c$.

Wenn die quadratische Funktion bei mehr als 2 Werten von x null ist, so ist sie identisch null d. h. bei allen Werten von x, und a, b, c sind null. Denn unter der Voraussetzung, daß x von α, β verschieden ist, ist das Produkt $a(x - \alpha)(x - \beta)$ nur dann null, wenn $a = 0$. Ebenso schließt man weiter, daß $bx + c$ bei mehr als einem Wert von x nur dann null ist, wenn $b = 0$ und $c = 0$.

Wenn x real ist und nicht zwischen den realen α und β liegt, so ist $a(x - \alpha)(x - \beta)$ mit a eines Zeichens. U. s. w.

5. Die quadratische Funktion $ax^2 + bx + c$ hat

$$\text{bei } x = \frac{-b}{2a} \text{ den extremen Wert } \frac{4ac - b^2}{4a}$$

der bei positivem a ein Minimum, bei negativem a ein Maximum ist (§. 2, 4). Denn in den Ausdrücken der Funktion (2)

$$\frac{(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac}{4a} = \frac{b^2 - 4ac - (2ax + b)^2}{-4a}$$

ist das Quadrat $(2ax + b)^2$, welches bei realen x nicht negativ ist, null bei $x = -b : 2a$. Dabei erreicht der erste Ausdruck mit positivem a seinen kleinsten, der zweite mit negativem a seinen größten Wert.

Anmerkung. Aus denselben Gründen erreicht die gebrochene Funktion

$$x + \frac{a}{x} = \left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{a}{x}}\right)^2 + 2\sqrt{a}$$

bei positivem x ihr Minimum $2\sqrt{a}$, wenn $\sqrt{x} - \sqrt{\frac{a}{x}} = 0$ d. h. $x = \sqrt{a}$. Vergl. §. 1, 10.

Um zu finden, bei welchen Werten x der Variablen die gebrochene Funktion

$$y = \frac{x - 4}{x^2 - 3x - 3}$$

ein Maximum oder ein Minimum erreicht, unterſuche man, bei welchen Werten y die Gleichung für x

$$yx^2 - (3y + 1)x - 3y + 4 = 0$$

reale Wurzeln hat. Zur Realität dieſer Wurzeln genügt es, daß

$$(3y + 1)^2 - 4y(4 - 3y) = 21y^2 - 10y + 1 = 21(y - \tfrac{1}{3})(y - \tfrac{1}{7})$$

nicht negativ iſt (2, 4). Alſo bleibt x real, während y von ∞ bis $\frac{1}{3}$ fällt und von $-\infty$ bis $\frac{1}{7}$ ſteigt. An den Grenzen $y = \frac{1}{3}$ und $\frac{1}{7}$ hat x den Wert $\frac{3y+1}{2y}$ d. i. 3 und 5. Folglich erreicht die gebrochene Funktion bei $x = 3$ ein Minimum $y = \frac{1}{3}$ und bei $x = 5$ ein Maximum $y = \frac{1}{7}$.

6. Eine quadratiſche Form von n Variablen (§. 2, 9) hat im allgemeinen $\frac{1}{2}n(n + 1)$ Glieder, welche die Quadrate der Variablen und die Produkte von je zwei Variablen enthalten; immer iſt ſie durch nicht mehr als n variable Quadrate mit gewiſſen poſitiven oder negativen Coefficienten darſtellbar (2).

Wenn unter den Gliedern der gegebenen Form u ein Quadrat vorkommt, z. B. $u = ax^2 + 2px + v$, wobei p eine lineare Form der übrigen Variablen und v eine quadratiſche Form derſelben iſt, ſo hat man

$$au = (ax + p)^2 - (p^2 - av)$$

d. h. u iſt darſtellbar durch das Quadrat einer linearen Form, welche x enthält, und eine quadratiſche Form, welche x nicht enthält. Wenn unter den Gliedern der gegebenen Form u kein Quadrat vorkommt z. B.

$$u = 2bxy + 2px + 2qy + v$$

wobei p, q lineare Formen der übrigen Variablen ſind und v eine quadratiſche Form derſelben, ſo hat man

$$2bu = 4(bx + q)(by + p) - (4pq - 2bv)$$
$$= (bx + q + by + p)^2 - (bx + q - by - p)^2 - (4pq - 2bv)$$

d. h. u iſt darſtellbar durch 2 Quadrate linearer Formen, welche x, y enthalten, und eine quadratiſche Form, welche x, y nicht enthält. Nun iſt eine binäre quadratiſche Form durch nicht mehr als 2 Quadrate darſtellbar, folglich eine ternäre durch nicht mehr als 3, u. ſ. w.

7. Die binäre quadratische Form $u = ax^2 + 2bxy + cy^2$ ist durch 1 Quadrat darstellbar, wenn ihre Determinante $b^2 - ac$ verschwindet. Denn man hat

$$au = (ax + by)^2 - (b^2 - ac)y^2$$

Die ternäre quadratische Form

$$u = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gxz + 2hxy$$

ist durch weniger als 3 Quadrate darstellbar, wenn ihre Determinante

$$-abc + af^2 + bg^2 + ch^2 - 2fgh$$

verschwindet. Wenn insbesondere a, b, c, fgh null sind, also z. B. $h = 0$, so ist

$$2u = 4z(gx + fy) = (gx + fy + z)^2 - (gx + fy - z)^2$$

d. h. u durch 2 Quadrate darstellbar. Wenn aber unter den Coefficienten a, b, c z. B. a nicht null ist, so hat man

$$au = (ax + hy + gz)^2 + py^2 + 2qyz + rz^2$$

wobei $p = ab - h^2$, $q = af - gh$, $r = ac - g^2$. In den besondern Fällen $p = 0$, $q = 0$, oder $q = 0$, $r = 0$ ist u durch 2 Quadrate darstellbar; in dem Falle $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ ist u durch 1 Quadrat darstellbar. Wenn aber unter den Größen p, r z. B. p nicht null ist und $q^2 - pr = 0$ ist, so bleibt

$$apu = p(ax + hy + gz)^2 + (py + qz)^2$$

d. h. u ist durch 2 Quadrate darstellbar, wenn

$$q^2 - pr = a(-abc + af^2 + bg^2 + ch^2 - 2fgh)$$

verschwindet. Das Binomium $pm^2 + n^2$ kann dann durch das Produkt der linearen Faktoren $(n + m\sqrt{-p})(n - m\sqrt{-p})$ ersetzt werden.

8. Ein System von 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten, von dem die eine Gleichung quadratisch, die andere linear ist, hat 2 Lösungen (§. 5, 3), die aus den Wurzeln einer quadratischen Hilfsgleichung berechnet werden. Im allgemeinen hat man aus der linearen Gleichung eine Unbekannte durch die andere auszudrücken und den gefundenen Wert in der quadratischen Gleichung zu substituieren. Aus der abgeleiteten quadratischen Gleichung findet man 2 Werte der übrig gebliebenen Unbekannten, und durch Substitution dieser Werte in der linearen Gleichung die zugehörigen Werte der andern Unbekannten; mithin erhält man 2 Systeme von Werten der Unbekannten, welche

dem gegebenen System von Gleichungen genügen. In besonderen Fällen führen besondere Methoden leichter zu demselben Ziele.

Beispiel 1. $x + y = a,\ xy = b.$

Indem man die erste Gleichung quadriert und die 4fache zweite subtrahiert, findet man statt der zweiten

$$(x - y)^2 = a^2 - 4b,\ x - y = \sqrt{a^2 - 4b}$$

Durch Addition und Subtraktion der Gleichungen

$$x + y = a$$
$$x - y = \sqrt{a^2 - 4b}$$

findet man, wenn c die positive Quadratwurzel bedeutet,

x	$\frac{1}{2}(a + c)$	$\frac{1}{2}(a - c)$
y	$\frac{1}{2}(a - c)$	$\frac{1}{2}(a + c)$

Beispiel 2. $ax + by = f,\ cx^2 + dy^2 = g.$

$$y = \frac{f - ax}{b},\ cx^2 + \frac{d}{b^2}(f - ax)^2 = g$$

Indem man diese Gleichung ordnet und auflöst, erhält man

$$x = \frac{adf + b\sqrt{(a^2d + b^2c)g - cdf^2}}{a^2d + b^2c} \text{ und } y = \frac{f - ax}{b}$$

Bezeichnet man die positive Quadratwurzel durch R, so findet man die Lösungen des Systems

x	$\frac{adf + bR}{a^2d + b^2c}$	$\frac{adf - bR}{a^2d + b^2c}$
y	$\frac{bcf - aR}{a^2d + b^2c}$	$\frac{bcf + aR}{a^2d + b^2c}$

9. Wenn F und G ganze Funktionen $m$ten und $n$ten Grades von x und y (§. 2, 8) und nicht beide durch dieselbe ganze Funktion von x und y teilbar sind, so werden die Lösungen des Systems $F = 0$, $G = 0$ im allgemeinen wie folgt gefunden. Man ordnet F und G nach fallenden Potenzen einer Unbekannten z. B. x, und bildet mit Hilfe geeigneter Multiplikatoren λ, μ (§. 5, 5) komponierte Gleichungen $\lambda F + \mu G = 0$, die für x niedern Grades sind, bis man endlich eine Gleichung $H = 0$ findet, welche x nicht enthält und die andere Unbekannte y bestimmt. Eine der komponierten Gleichungen, die für x niedrigsten Grades ist, dient dann zur Bestimmung der Werte von x,

welche den einzelnen Werten von y entsprechen*). Unter der Bedingung $H = 0$ haben die Gleichungen $F = 0$ und $G = 0$ für x mindestens eine gemeinschaftliche Wurzel; also sind unter der Bedingung $H = 0$ die Funktionen F und G von x durch eine ganze Funktion von x teilbar, deren Coefficienten durch die Coefficienten von F und G rational ausgedrückt werden können.

Wenn z. B. $F = ax^2 + bx + c$, $G = a'x^2 + b'x + c'$, und die Coefficienten $a, a', \ldots$ von y abhängen, so bilde man aus dem System $F = 0$, $G = 0$ das System

$$\begin{vmatrix} a & bx + c \\ a' & b'x + c' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} ax + b & c \\ a'x + b' & c' \end{vmatrix} = 0$$

d. i. $(ab)x + (ac) = 0$, $(ac)x + (bc) = 0$

und aus diesem das resolvierende System

$$\begin{vmatrix} (ab)(ac) \\ (ac)(bc) \end{vmatrix} = 0, \quad (ab)x + (ac) = 0$$

Die erste Gleichung (die Resultante) bestimmt y; die andre, welche für x ersten Grades ist, bestimmt die den y entsprechenden x.

Das obige allgemeine System $F = 0$, $G = 0$ hat, wie unten §. 10 bewiesen wird, mn Lösungen d. h. es genügen dem System mn Werte von y mit ebensoviel entsprechenden Werten von x. Wenn die zuletzt abgeleitete Gleichung für y bei besondern Werten der Coefficienten auf einen niedern als den mnten Grad herabsinkt, so hat sie eine entsprechende Menge unendlicher Wurzeln (§. 4, 4). Man verhütet den Verlust der letztern, wenn man statt der gegebenen Funktionen $F(x, y)$ und $G(x, y)$ die homogenen Funktionen (§. 2, 10)

$$t^m F\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right) \text{ und } t^n G\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right)$$

in Betracht zieht; bei $t = 0$ erhält man die unendlichen, bei $t = 1$ die endlichen Lösungen des Systems.

Wenn P, Q, R, S gegebene Funktionen der Unbekannten sind, so wird dem System $PQ = 0$, $RS = 0$ durch die Systeme

$$\begin{array}{c|c|cc} P = 0 & P = 0 & Q = 0 & Q = 0 \\ R = 0 & S = 0 & R = 0 & S = 0 \end{array}$$

vollständig genügt, weil ein Produkt nur dann verschwindet, wenn ein Faktor den Wert 0 hat. Wenn $R = P$, so wird dem gegebenen System auch durch die Gleichung $P = 0$ genügt.

*) Euler Introd. II c. 19. Mém. de Berlin 1764 p. 96 und Bézout Mém. de Paris 1764 p. 298. Vergl. des Verf. Determinanten §. 11.

Wenn P und Q homogene Funktionen von denselben Dimensionen sind, so bildet man aus dem System $P = a$, $Q = b$ die Gleichung $bP - aQ = 0$ zur Berechnung des Verhältnisses der Unbekannten.

In manchen Fällen wird das gegebene System vereinfacht, wenn man die Summe, die Differenz, das Produkt oder andere Funktionen der Unbekannten als neue Unbekannte substituiert.

Beispiel 1. Das System

$$x^2(y^2 - 1) - 2xy(y^2 - 1) + y^4 - 2y^2 + 1 = 0$$
$$x^2(y^2 - 3y + 2) - y^4 - 3y^3 + 7y^2 + 15y - 18 = 0$$

ist kongruent mit dem System

$$(y - 1)(y + 1)(x - y + 1)(x - y - 1) = 0$$
$$(y - 1)(y - 2)(x + y + 3)(x - y - 3) = 0$$

und untergeordnet dem homogenen System

$$(y - t)(y + t)(x - y + t)(x - y - t) = 0$$
$$(y - t)(y - 2t)(x + y + 3t)(x - y - 3t) = 0$$

also auflösbar durch die Gleichung $y - t = 0$ und durch die Systeme

$$\begin{array}{l|l|l} y + t = 0 & y + t = 0 & y + t = 0 \\ y - 2t = 0 & x + y + 3t = 0 & x - y - 3t = 0 \end{array}$$

u. s. w. Man findet außer $y = 1$ die Lösungen des Systems

t	x	y	
0	x	0	
	x	x	2fach
1	-2	-1	2fach
	2	-1	
	1	2	
	3	2	
	-1	-2	

In der ersten Lösung entspricht einem unendlichen Wert von x ein endlicher Wert von y.

Beispiel 2. Das System

$$x^3 - y^2 - 3y(x - y) = 0$$
$$3x^2 - 2xy - y^2 = 0$$

ist kongruent mit dem System

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 - 3y) = 0$$
$$(x - y)(3x + y) = 0$$

welchem zuerst durch die Gleichung $x - y = 0$ genügt wird, dann aber auch durch das System $x^2 + xy + y^2 - 3y = 0$, $3x + y = 0$. Durch die Substitution $y = -3x$ findet man $7x^2 + 9x = 0$, also für x die Werte 0, $-\frac{9}{7}$, und für y die entsprechenden Werte 0, $\frac{27}{7}$. Die Lösung 0, 0 ist in der Gleichung $x - y = 0$ enthalten.

Beispiel 3. Aus dem System

$$x^2 + y^2 = xy, \quad x + y = xy$$

leitet man die Gleichung $(x + y)^2 = 3xy$ oder $(x + y)^2 - 3(x + y) = 0$ ab, welche die erste Gleichung vertritt. Daher hat man die Systeme

$$\begin{array}{c|c} x + y = 0 & x + y = 3 \\ xy = 0 & xy = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c} 2x & 0 & 3 + i\sqrt{3} \quad 3 - i\sqrt{3} \\ 2y & 0 & 3 - i\sqrt{3} \quad 3 + i\sqrt{3} \end{array}$$

Die Lösung 0, 0 ist eine 2fache.

Beispiel 4. Aus dem System

$$x^3y - xy^3 + 3xy + x + y = 0, \quad x^2 - y^2 + 3 = 0$$

erhält man durch Substitution von $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$ für x, y das allgemeinere homogene System

$$x^3y - xy^3 + 3t^2xy + t^3(x + y) = 0, \quad x^2 - y^2 + 3t^2 = 0$$

Wenn man von der ersten Gleichung die mit xy multiplicierte zweite Gleichung subtrahiert, so findet man anstatt der ersten Gleichung

$$t^3(x + y) = 0$$

und daher die Systeme

$$\begin{array}{c|c} t^3 = 0 & x + y = 0 \\ x^2 - y^2 = 0 & x^2 - y^2 + 3t^3 = 0 \end{array}$$

Beiden Systemen genügt nur $t = 0$, d. h. es genügen dem gegebenen System nur unendliche Werte von x und y, die entweder gleich (3fach) oder entgegengesetzt gleich (5fach) sind.

Beispiel 5. Das System

$$\frac{1}{x + y} + \frac{1}{x - y} = \frac{3}{4}, \quad 2x^3 + 6xy^2 = \frac{9}{64}(x^2 - y^2)^3$$

ist dem homogenen System

$8tx = 3x^2 - 3y^2$, $2t^3x(x^2 + 3y^2) = \frac{9}{64}(x^2 - y^2)^3$ untergeordnet. Durch Substitution von $3y^2 = 3x^2 - 8tx$ in der zweiten Gleichung findet man $t^3x^2(x - 3t) = 0$, und daher die Lösungen des Systems

t	x	y	
0	x	$\pm x$	3fach
1	0	0	4fach
	3	± 1	

Beispiel 6. Das System

$$x + y = a,\ x^5 + y^5 = b$$

ist dem homogenen System

$$x + y = at,\ x^5 + y^5 = bt^5$$

untergeordnet. Setzt man $xy = v$, so erhält man als zweite Gleichung (Allg. Arithm. §. 9, 5)

$$(a^5 - b)t^5 - 5a^3t^3v + 5atv^2 = 0$$

Daher wird dem gegebenen System auch durch $t = 0$, $x + y = 0$ genügt, d. h. durch entgegengesetzt gleiche unendliche Werte der Unbekannten. Nimmt man nun wieder $t = 1$, so ist zufolge des Systems $x + y = a$, $xy = v$

$$2x = a + \sqrt{a^2 - 4v},\ 2y = a - \sqrt{a^2 - 4v}$$

und vermöge der quadratischen Hilfsgleichung für v

$$\frac{a^2}{2} - v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^5 + 4b}{5a}},\ a^2 - 4v = -a^2 + 2\sqrt{\frac{a^5 + 4b}{5a}}$$

Bezeichnet man den positiven Wert der letztern Quadratwurzel durch c, ferner die positiven Quadratwurzeln von $-a^2 + 2c$ und $-a^2 - 2c$ durch d und d', so erhält man die Lösungen des Systems

$2x$	$a + d$	$a - d$	$a + d'$	$a - d'$
$2y$	$a - d$	$a + d$	$a - d'$	$a + d'$

Beispiel 7. Das System

$$ax + by = 2(x^2 - y^2)$$

$$-\frac{a}{x + y} + \frac{b}{x - y} = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

ist dem homogenen System

$$atx + bty - 2x^2 + 2y^2 = 0$$

$$-at(x - y)xy + bt(x + y)xy - x^4 + y^4 = 0$$

untergeordnet. Indem man zu der zweiten Gleichung die mit $(x - y)y$ multiplicierte erste Gleichung addiert, findet man als zweite Gleichung

$$(bty - x^2 + y^2)(x^2 + 2xy - y^2) = 0$$

oder $(bty - x^2 + y^2)(x + cy)(x + c'y) = 0$, wobei $c = 1 + \sqrt{2}$, $c^2 - 1 = 2c'$ und $c' = 1 - \sqrt{2}$ ist. Aus dem ersten System

$$atx + bty - 2x^2 + 2y^2 = 0, \quad bty - x^2 + y^2 = 0$$

folgt $t(ax - by) = 0$. Zu $t = 0$ gehört $y = \pm x$; zu $t = 1$, $ax - by = 0$ gehört $x = 0$, $y = 0$, und

$$x = b\frac{ab}{b^2 - a^2} \quad y = a\frac{ab}{b^2 - a^2}$$

Aus dem andern System

$$ax + by - 2x^2 + 2y^2 = 0, \quad x + cy = 0$$

folgt $4cy^2 - (b - ac)y = 0$ u. s. w. Daher hat man die Lösungen des gegebenen Systems

t	x	y	
0	x	$\pm x$	
1	0	0	3fach
	$b\frac{ab}{b^2 - a^2}$	$a\frac{ab}{b^2 - a^2}$	
	$\frac{ac - b}{4}$	$\frac{b - ac}{4c}$	
	$\frac{ac' - b}{4}$	$\frac{b - ac'}{4c'}$	

Beispiel 8. Wenn u und u' ternäre quadratische Formen sind (6), $u = ax^2 + \ldots$, $u' = a'x^2 + \ldots$, so giebt es 3 Multiplikatoren λ_1, λ_2, λ_3 von der Art, daß die abgeleiteten Formen $u + \lambda_1 u'$, $u + \lambda_2 u'$, $u + \lambda_3 u'$ Produkte linearer Faktoren p_1q_1, p_2q_2, p_3q_3 werden. Denn die Determinante der Form $u + \lambda u'$ ist eine kubische Funktion von λ, die bei 3 bestimmten Werten von λ verschwindet. Das System $u = 0$, $u' = 0$ wird durch das System $p_1q_1 = 0$, $p_2q_2 = 0$ vertreten, dessen Lösungen zugleich der Gleichung $p_3q_3 = 0$ genügen. Vergl. Jacobi Crelles J. 14 p. 286.

§. 7. Die kubiſchen und biquadratiſchen Gleichungen.

(Heis §§. 95—98. 69. 105.)

1. Wenn man die Glieder der Gleichung $m$ten Grades

$$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots = 0$$

der Reihe nach mit der geometriſchen Progreſſion $\frac{1}{v}$, 1, v, ... multipliciert, ſo erhält man eine Gleichung desſelben Grades, deren Wurzeln zu den Wurzeln der gegebenen Gleichung das Verhältnis v haben. Denn die Subſtitution $x = y : v$ giebt nach Multiplikation mit v^{m-1}

$$\frac{a}{v}y^m + by^{m-1} + cvy^{m-2} + \ldots = 0$$

Um in der transformierten Gleichung den Coefficienten 1 der höchſten Potenz der Unbekannten zu erhalten, ſetze man $v = a$. Um den zweiten Coefficienten dem erſten gleich zu erhalten, ſetze man $v = a : b$, u. ſ. w.

2. Wenn man in der Gleichung $y^m + by^{m-1} + acy^{m-2} + \ldots = 0$ $y = z - b : m$ ſetzt, ſo findet man für z eine Gleichung desſelben Grades, welche z^{m-1} nicht enthält. Denn die Subſtitution $y = z + \lambda$ giebt

$$\begin{array}{l|l|l} z^m + m\lambda & z^{m-1} + \binom{m}{2}\lambda^2 & z^{m-2} + \ldots = 0 \\ \quad + b & \quad + (m-1)b\lambda & \quad + \ldots \\ & \quad + ac & \quad + \ldots \\ & & \quad + \ldots \end{array}$$

eine Gleichung $m$ten Grades für z, welche entweder z^{m-1} oder z^{m-2} .. nicht enthält, nachdem man λ durch eine der Gleichungen

$$m\lambda + b = 0$$

$$\binom{m}{2}\lambda^2 + (m-1)b\lambda + ac = 0$$

u. ſ. w. beſtimmt hat.

Die numeriſche Transformation von $ax^m + bx^{m-1} + \ldots$ wird am einfachſten zuſtande gebracht, indem man zuerſt den Wert von

$ax + b$ mit dem Wert von x multipliciert und c addiert, indem man ferner den Wert von $ax^2 + bx + c$ mit x multipliciert und d addiert, u. ſ. w. Z. B. Aus $3x^3 - 6x^2 + 5x - 4 = 0$

	-6			
1	2			
1	-4	15		
	2	-8		
1	-2	7	-36	
	2	-4	14	
1	0	3	-22	

erhält man durch die Subſtitution $x = \frac{1}{3}y$ die Gleichung

$$y^3 - 6y^2 + 15y - 36 = 0$$

und durch die Subſtitution $y = z + 2$

$$z^3 + 3z - 22 = 0$$

während $3x - 2 = z$ iſt.

Anmerkung. Nachdem man $ax + \lambda$ oder $ax^2 + \lambda x + \mu$ oder $ax^3 + \lambda x^2 + \mu x + \nu$ gleich y geſetzt hat, findet man eine Gleichung $m$ten Grades für y, welche durch Verfügung über λ, μ, ν nur m, $m - 1$, $m - 2$ Glieder behält, und eine Gleichung, welche x durch y eindeutig beſtimmt*).

3. Die Auflöſung einer kubiſchen Gleichung kann auf die Auflöſung der beſondern kubiſchen Gleichung

$$x^3 + 3ax + 2b = 0$$

zurückgeführt werden (2). Durch die Subſtitution $x = t + u$ erhält man die Gleichung

$$t^3 + 3t^2u + 3tu^2 + u^3 + 3a(t + u) + 2b$$
$$= t^3 + u^3 + 3(tu + a)(t + u) + 2b = 0$$

welcher, weil $t + u$ nicht null iſt, durch die Gleichungen für t und u

$$t^3 + u^3 + 2b = 0 \qquad tu + a = 0$$

genügt werden kann. Aus dem Syſtem $t^3 + u^3 = -2b$, $t^3u^3 = -a^3$ findet man (§. 6, 8)

$$t^3 = -b + \sqrt{b^2 + a^3}$$
$$u^3 = -b - \sqrt{b^2 + a^3}$$

Wenn die Discriminante $b^2 + a^3$ poſitiv iſt, wenn die realen Kubikwurzeln von $-b + \sqrt{b^2 + a^3}$ und $-b - \sqrt{b^2 + a^3}$ durch t und u, die eigentlichen Kubikwurzeln von 1 (Allg. Arithm. §. 18, 9) durch

$$\alpha = -\tfrac{1}{2} + i \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \qquad \alpha^2 = -\tfrac{1}{2} - i \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

bezeichnet werden, ſo ſind

*) Tſchirnhauſens Methode. Brief an Leibniz 1677 April 17. Acta Erud. 1683 p. 204. S. des Verf. Determ. §. 11.

$$\begin{array}{rl} & t + u \\ \alpha t + \alpha^2 u &= -\tfrac{1}{2}(t+u) + i\,.\,\tfrac{1}{2}(t-u)\sqrt{3} \\ \alpha^2 t + \alpha u &= -\tfrac{1}{2}(t+u) - i\,.\,\tfrac{1}{2}(t-u)\sqrt{3} \end{array}$$

Wurzeln der gegebenen kubischen Gleichung*), die erste real, die beiden andern konjugiert komplex. Die Rationalität der Wurzeln wird durch direkte Versuche entschieden. Über Gleichungen 3ten und 4ten Grades mit einer rationalen Wurzel: Kummer Berl. Monatsbericht 1880 Nov. 15. Vergl. Jacobi 1835 Crelle J. 13 p. 341.

Die Binomien

$$\begin{array}{lll} t + \alpha u & \alpha t + u & \alpha t + \alpha u \\ t + \alpha^2 u & \alpha^2 t + u & \alpha^2 t + \alpha^2 u \end{array}$$

genügen der gegebenen Gleichung nicht, weil die Produkte ihrer Glieder αtu oder $\alpha^2 tu$, also nicht $-a$ betragen. In der That wird wie §. 6, 4 bewiesen, daß eine kubische Gleichung nicht mehr als 3 Wurzeln hat.

Wenn $b^2 + a^3$ null ist, so ist $u = t$, und die Gleichung hat 3 reale Wurzeln, von denen 2 einander gleich sind, $2t$, $-t$, $-t$. In der That ist bei $a = -c^2$, $b = -c^3$

$$x^3 - 3c^2x - 2c^3 = (x - 2c)(x + c)^2.$$

4. Wenn $b^2 + a^3$ negativ ist, so hat die Gleichung 3 verschiedene reale Wurzeln, welche in den obigen Formeln als Summen der Kubikwurzeln von konjugiert komplexen Zahlen erscheinen. Um die Gleichung $x^3 - 3ax + 2b = 0$ unter der Voraussetzung $b^2 < a^3$ aufzulösen, setzt man (Allg. Arithm. §. 31, 11)

$$-b \pm \sqrt{b^2 - a^3} = -b \pm i\sqrt{a^3 - b^2} = \varrho(\cos\omega \pm i\sin\omega)$$

$$\text{d. h.} \quad \varrho^2 = a^3 \qquad \cos\omega = \frac{-b}{\varrho} = \frac{-b}{a^{\frac{3}{2}}}$$

und findet als Summen der Kubikwurzeln

$$2a^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{3}\omega \qquad 2a^{\frac{1}{2}}\cos(\tfrac{1}{3}\omega + \tfrac{2}{3}\pi) \qquad 2a^{\frac{1}{2}}\cos(\tfrac{1}{3}\omega + \tfrac{4}{3}\pi)$$

die Wurzeln der Gleichung**). Beispiele: Klügel a. a. O. p. 150.

---

*) Die reale Wurzel der kubischen Gleichung ist von Scipione dal Ferro 1505, bald darauf auch von Tartaglia erfunden, und von Cardano 1545 (Ars magna c. XI.) nebst dem Beweis mitgeteilt worden, weshalb sie den Namen „Cardanische Formel" führt. Vergl. Klügel math. W. I p. 34.

**) Die Trisektion des Winkels ω (die Berechnung von $\cos\frac{1}{3}\omega$ aus $\cos\omega$) ist auf die Auflösung einer kubischen Gleichung mit 3 realen Wurzeln von Bombelli 1579 reduciert worden. Das umgekehrte Verfahren kommt bei Vieta vor, konstruktiv bei Descartes Géom. III. Vergl. Klügel math. W. I p. 38. 44. 53.

Daß in dieſem Fall (casus irreducibilis) die kubiſche Gleichung reale Wurzeln hat, erkennt man aus den Werten der kubiſchen Funktion $x^3 - 3ax + 2b$, welche realen x entſprechen*). Die Subſtitution $x = a^{\frac{1}{2}}y$ giebt

$$x^3 - 3ax + 2b = a^{\frac{3}{2}}(y^3 - 3y + c)$$

wo $c = 2b : a^{\frac{3}{2}}$ zwiſchen -2 und 2 liegt. Nun iſt die Funktion $y^3 - 3y + c$ bei endlichen realen y endlich real und kontinuierlich (§. 2, 4), bei $y = -2$ negativ, bei $y = -1$ poſitiv, bei $y = 1$ negativ, bei $y = 2$ poſitiv; folglich iſt ſie null bei je einem y zwiſchen -2 und -1, -1 und 1, 1 und 2.

Wenn $x^3 + 3ax + 2b = 0$ die reale Wurzel 2α hat, ſo iſt

$$x^3 + 3ax + 2b = (x - 2\alpha)(x^2 + 2\alpha x + \beta)$$
$$2b = -2\alpha\beta \qquad 3a = \beta - 4\alpha^2$$

Die Subſtitution $\beta - \alpha^2 = \frac{3}{4}\gamma$ ergiebt

$$b^2 + a^3 = \beta^2(\beta - \tfrac{3}{4}\gamma) + (\gamma - \beta)^3$$
$$= \gamma(\gamma^2 - 3\gamma\beta + \tfrac{9}{4}\beta^2) = \gamma(\gamma - \tfrac{3}{2}\beta)^2$$

d. h. $b^2 + a^3$ hat das Zeichen von γ oder $\beta - \alpha^2$, von dem die Realität der beiden andern Wurzeln abhängt. Vgl. Liebrecht Grunert Archiv 1876 t. 59 p. 217.

Anmerkung. Wenn a poſitiv iſt, ſo hat die trinomiſche Gleichung

$$x^m - x - a = 0$$

eine poſitive Wurzel zwiſchen 1 und $1 + a$, welche unter den realen Wurzeln der Gleichung die größte iſt, weil $1^m - 1 - a$ negativ, $(1 + a)^m - 1 - 2a$ poſitiv iſt. Dieſer Wurzel nähert man ſich durch die Berechnung von**)

$$b_1 = \sqrt[m]{a + \sqrt[m]{a}} \quad b_2 = \sqrt[m]{a + b_1} \quad b_3 = \sqrt[m]{a + b_2} \ldots$$

Denn es iſt $b_1 > \sqrt[m]{a}$, $b_2 > b_1$, $b_3 > b_2$, .. Dabei hat man

$$b_k^m - b_{k-1} - a = 0, \quad b_k^m - b_k - a < 0$$

Alſo kann keine der Größen $b_1, b_2, b_3, \ldots$ die größte reale Wurzel der Gleichung $x^m - x - a = 0$ überſteigen.

---

*) Stainville 1812 Corresp. s. l'Ec. polyt. 3 p. 58 und Mélanges d'anal. p. 197.

**) Bolyai Tentamen in elem. math. etc. Maros Vasarhely 1832 t. 1 p. 413. Eiſenſtein 1844 Crelle J. 27 p. 83.

5. Die Auflösung einer biquadratischen Gleichung kann auf die Auflösung der besondern biquadratischen Gleichung

$$x^4 + 4ax^2 + 8bx + 4c = 0$$

zurückgeführt werden (2). Die Wurzeln dieser Gleichung werden durch die Wurzeln einer bestimmten kubischen Gleichung (Resolvente) ausgedrückt*). Unter den Voraussetzungen

$$t + u + v = \alpha, \quad tu + tv + uv = \beta, \quad tuv = \gamma$$

ist $(y - t)(y - u)(y - v) = y^3 - \alpha y^2 + \beta y - \gamma$, d. h. die Gleichung $y^3 - \alpha y^2 + \beta y - \gamma = 0$ für die Unbekannte y hat die Wurzeln t, u, v (§. 4, 2). Wenn nun

$$x = \sqrt{t} + \sqrt{u} + \sqrt{v}$$

so findet man

$$x^2 = \alpha + 2\sqrt{tu} + 2\sqrt{tv} + 2\sqrt{uv}$$
$$\tfrac{1}{4}(x^2 - \alpha)^2 = \beta + 2x\sqrt{\gamma}$$
$$x^4 - 2\alpha x^2 - 8x\sqrt{\gamma} + \alpha^2 - 4\beta = 0$$

Diese 2deutige biquadratische Gleichung für x hat demnach die 8deutige Wurzel $\sqrt{t} + \sqrt{u} + \sqrt{v}$, wenn t, u, v die Wurzeln der Resolvente d. i. der kubischen Gleichung $y^3 - \alpha y^2 + \beta y - \gamma = 0$ sind.

Die aufzulösende biquadratische Gleichung stimmt mit der vorstehenden, deren Wurzeln bekannt sind, überein unter den Bedingungen

$$4a = -2\alpha \quad 8b = -8\sqrt{\gamma} \quad 4c = \alpha^2 - 4\beta$$

d. h. $\alpha = -2a$, $\beta = a^2 - c$, $\sqrt{\gamma} = -b$, und hat die Resolvente

$$y^3 + 2ay^2 + (a^2 - c)y - b^2 = 0$$

Aus den Wurzeln t, u, v der Resolvente findet man als Wurzeln der gegebenen Gleichung die 4 Werte der Formel $\sqrt{t} + \sqrt{u} + \sqrt{v}$, welche der Bedingung $\sqrt{t}\sqrt{u}\sqrt{v} = \sqrt{\gamma} = -b$ genügen.

Diese Lösung, welche auf der Formation einer Gleichung mit gegebenen Wurzeln beruht, ist von Euler 1738 Comm. Petrop. 6 p. 218 gegeben worden. Ferrari hatte

*) Diese Erfindung ist von Ludovico Ferrari gemacht, von Cardano 1545 (Ars magna c. 39) und Bombelli 1572 mitgeteilt worden. Vergl. Klügel math. W. I p. 38, II p. 401. Die zur Auflösung der biquadratischen Gleichung erforderliche kubische Gleichung heißt die Resolvente derselben bei Euler, Réduite bei Clairaut u. a. Man kann auch aus der vollständigen biquadratischen Gleichung mit 5 Gliedern die verkürzte kubische Resolvente mit 3 Gliedern ableiten. Vergl. Eisenstein 1844 Crelle J. 27 p. 81. Sylvester Philos. Mag. 1851, II p. 395. Aronhold Crelle J. 52 p. 95. Heilermann Schlömilch Zeitschrift 21 p. 364. Fiedler Elem. d. Geom. u. Algebra p. 163. Darboux Liouville J. 1873 p. 220.

$$x^4 + 4ax^2 + 8bx + 4c$$
$$= (x^2 + 2r)^2 - 4\{x\sqrt{r-a} - \sqrt{r^2-c}\}^2$$

gesetzt unter der Bedingung $\sqrt{r-a}\sqrt{r^2-c} = b$. Dieselbe Formel wird in das Produkt $(x^2 + 2x\sqrt{\alpha+\beta})(x^2 - 2x\sqrt{\alpha+\beta'})$ verwandelt (Descartes Géom. III). Man kann auch

$$a^3(ax^4 + 4bx^3 + cx^2 + dx + e)$$

durch die Differenz von 2 Quadraten

$$(a^2x^2 + 2abx + A)^2 - (Bx + C)^2$$

darstellen. U. s. w.

6. Die Resolvente hat eine positive reale Wurzel v, weil die kubische Funktion $y^3 + 2ay^2 + (a^2 - c)y - b^2$ bei $y = 0$ negativ, bei hinreichend großen positiven y positiv ist (4). Also ist $\sqrt{v}$ real, ihr Zeichen wird durch das Zeichen des Produkts $\sqrt{t}\sqrt{u}$ bestimmt.

Das Produkt tu der beiden andern Wurzeln der Resolvente ist positiv, weil $tuv = b^2$ positiv ist. Wenn nun t, u real und beide positiv sind, so hat die aufzulösende biquadratische Gleichung 4 reale Wurzeln. Wenn t, u beide negativ sind, so hat die Gleichung 2 Paare von komplexen Wurzeln. Denn unter den Voraussetzungen $t = -g^2$, $u = -h^2$ hat $\sqrt{t} + \sqrt{u}$ die Werte

$$ig + ih, \quad -ig - ih, \quad ig - ih, \quad -ig + ih$$

In den beiden ersten Fällen ist das Produkt $\sqrt{t}\sqrt{u}$ negativ, in den beiden letzten Fällen positiv.

Wenn aber t, u konjugiert komplex sind, so hat die biquadratische Gleichung ein Paar komplexe und 2 reale Wurzeln. Denn unter den Voraussetzungen

$$t = 2p + 2iq, \quad u = 2p - 2iq, \quad r^2 = p^2 + q^2$$

findet man (Allg. Arithm. §. 16, 10)

$$\sqrt{t} = \sqrt{r+p} + i\sqrt{r-p}, \quad \sqrt{u} = \sqrt{r+p} - i\sqrt{r-p}$$

also die zusammengehörigen Werte

$\sqrt{t} + \sqrt{u}$	$2\sqrt{r+p}$	$-2\sqrt{r+p}$	$2i\sqrt{r-p}$	$-2i\sqrt{r-p}$
$\sqrt{t}\sqrt{u}$	$2r$	$2r$	$-2r$	$-2r$

Wenn insbesondere $t = u$, so sind 2 Werte von $\sqrt{t} + \sqrt{u}$ null, die biquadratische Gleichung hat die 2fache Wurzel $\sqrt{v} = b : t$. Wenn $t = u = v$, so hat die gegebene Gleichung die 3fache Wurzel $\sqrt{v} = b : t$ und die 1fache Wurzel $3\sqrt{v}$. Wenn 2 Wurzeln der Resolvente null sind d. h. $b = 0$, $c = a^2$, so hat die gegebene Gleichung die 2fachen Wurzeln $\pm\sqrt{-2a}$. Wenn 3 Wurzeln der Resolvente null sind, so hat die gegebene Gleichung die 4fache Wurzel 0.

Die Unmöglichkeit, die Wurzeln einer allgemeinen Gleichung, deren Grad den 4ten übersteigt, durch Wurzeln reiner Gleichungen oder durch Wurzeln von Gleichungen niederer Grade auszudrücken, wurde von Gauß 1799 (Demonstr. nova 9) vermutet und von Abel 1825 (Crelle J. 1 p. 65) bewiesen. Vergl. Wantzel in Serret Alg. sup. 516. Scheibner Berichte der Leipz. Ges. d. W. 1863 p. 63. Daß die allgemeine Gleichung 5ten Grades mit Hilfe transscendenter Funktionen aufgelöst werden kann, hat Hermite gezeigt (Compt. rend. 1858[a] p. 508 und p. 715). Vergl. Kronecker Monatsbericht der Berliner Akad. 1861 Juni 27. Brioschi Istituto Lombardo 1858 Nov. 25. Math. Ann. 1878 t. 13 p. 109. Bertrand Rapport sur les progrès de l'Anal. 1868 p. 10. F. Klein das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen 5ten Grades 1884.

7. Die volle Gleichung für x

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$$

wird durch die Substitutionen $x = y : a$, $y = z - b$ transformiert in

$$y^3 + 3by^2 + 3acy + a^2d = 0$$
$$z^3 + 3Fz + 2G = 0$$

wo $z = ax + b$, $F = ac - b^2$, $2G = a^2d - 3abc + 2b^3$.

Wenn nun $-G + \sqrt{G^2 + F^3}$ und $-G - \sqrt{G^2 + F^3}$ real sind und die realen Kubikwurzeln t, u haben, so wird der gegebenen kubischen Gleichung genügt durch (3)

$$ax + b = t + u, \quad \alpha t + \alpha^2 u, \quad \alpha^2 t + \alpha u$$

Wenn aber $-G + \sqrt{G^2 + F^3}$ komplex ist und die Kubikwurzeln $p + iq$, $\alpha(p + iq)$, $\alpha^2(p + iq)$ hat, so genügen der kubischen Gleichung

$$ax + b = 2p, \quad -p - q\sqrt{3}, \quad -p + q\sqrt{3}$$

Wenn $G^2 + F^3 = 0$, so sind die Wurzeln der kubischen Gleichung nicht alle von einander verschieden, also $\operatorname{discr}(ax^3 + \ldots) = 0$. In der That findet man

$$\frac{4}{a^2}(G^2 + F^3) = a^2d^2 - 3b^2c^2 + 4ac^3 + 4b^3d - 6abcd$$

$$= \operatorname{discr}(ax^3 + \ldots) = \begin{vmatrix} a & 2b & c & \\ & a & 2b & c \\ b & 2c & d & \\ & b & 2c & d \end{vmatrix}$$

8. I. Die Gleichung $ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0$ wird durch die Substitutionen $x = y : a$, $y = z - b$ transformiert in

$$y^4 + 4by^3 + 6acy^2 + 4a^2dy + a^3e = 0$$
$$z^4 + 6Fz^2 + 8Gz - 3F^2 - 3a^2H = 0$$

wo $z = ax + b$, $F = ac - b^2$, $2G = a^2d - 3abc + 2b^3$,

$$3H = 4bd - ac - 3c^2$$
$$-3F^2 - 3a^2H = a^3e - 4a^2bd + 6ab^2c - 3b^4$$

II. Wenn $u^3 - \alpha u^2 + \beta u - \gamma$ null wird bei $u = p, q, r$, ſo iſt

$$u^3 - \alpha u^2 + \beta u - \gamma = (u-p)(u-q)(u-r)$$
$$p + q + r = \alpha,\ pq + pr + qr = \beta,\ pqr = \gamma$$

Bei $z = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ hat man dann

$$z^4 - 2\alpha z^2 - 8\sqrt{\gamma}\,.\,z + \alpha^2 - 4\beta = 0$$

Dieſe Gleichung für z kongruiert mit der gegebenen Gleichung (I) unter den Bedingungen

$$-2\alpha = 6F,\ -8\sqrt{\gamma} = 8G,\ \alpha^2 - 4\beta = -3F^2 - 3a^2H$$

d. h. $-\alpha = 3F$, $\sqrt{\gamma} = -G$, $4\beta = 12F^2 + 3a^2H$. Alſo:

Wenn $u^3 + 3Fu^2 + (3F^2 + \frac{3}{4}a^2H)u - G^2$ null iſt bei $u = p, q, r$, ſo iſt $ax^4 + \ldots$ null bei

$$ax + b = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$$

Die 8deutige Formel wird auf 4 Werte beſchränkt durch die Bedingung $\sqrt{p}\sqrt{q}\sqrt{r} = -G$.

III. Die kubiſche Reſolvente $u^3 + 3Fu^2 + \ldots = 0$ der biquadratiſchen Gleichung $ax^4 + \ldots = 0$ wird durch die Subſtitution $u = \frac{1}{2}av - F$ transformiert in

$$v^3 + 3Hv + 2J = 0$$

wo

$$J = -\frac{4G^2 + 4F^3 + 3a^2FH}{a^3} = ace - ad^2 - c^3 - eb^2 + 2bcd$$
$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix}$$

Wenn nun $v^3 + 3Hv + 2J$ null iſt bei $v = v_1, v_2, v_3$, ſo iſt $u^3 + 3Fu^2 + \ldots$ null bei $u = \frac{1}{2}av_1 - F, \ldots$, und man hat

$$p = \tfrac{1}{2}av_1 - F,\ q = \tfrac{1}{2}av_2 - F,\ r = \tfrac{1}{2}av_3 - F$$

IV. Wenn $J^2 + H^3 = 0$, ſo ſind die Wurzeln der kubiſchen Reſolvente nicht alle von einander verſchieden. Daher ſind auch die Wurzeln der biquadratiſchen Gleichung nicht alle von einander verſchieden, und $\operatorname{discr}(ax^4 + \ldots) = 0$. In der That findet man

$$-27(J^2+H^3)=\operatorname{discr}(ax^4+..)=\begin{vmatrix} a & 3b & 3c & d & & \\ & a & 3b & 3c & d & \\ & & a & 3b & 3c & d \\ b & 3c & 3d & e & & \\ & b & 3c & 3d & e & \\ & & b & 3c & 3d & e \end{vmatrix}$$

9. Wenn unter den Coefficienten der Gleichung $2n$ten Grades

$$a_0x^{2n}+a_1x^{2n-1}+..+a_{2n-1}x+a_{2n}=0$$

die ersten $n+1$ willkürlich, die folgenden aber so gegeben sind, daß

$$a_{n+1}=a_{n-1}\varepsilon,\quad a_{n+2}=a_{n-2}\varepsilon^2,\ ..,\ a_{n+k}=a_{n-k}\varepsilon^k,\ ..$$

ist, so gehören die Wurzeln der Gleichung paarweise zusammen. Das Produkt von je zwei zusammengehörigen Wurzeln ist ε, und die Summe derselben ist eine Wurzel einer bestimmten Resolvente $n$ten Grades. Wenn insbesondere $\varepsilon=1$ ist, so heißt die gegebene Gleichung reciprok*).

Indem man nämlich durch x^n dividiert, findet man die Gleichung

$$a_n+a_{n-1}\left(x+\frac{\varepsilon}{x}\right)+..+a_0\left(x^n+\frac{\varepsilon^n}{x^n}\right)=0$$

welche bei der Vertauschung von x mit $\varepsilon:x$ unverändert bleibt. Wenn also α eine Wurzel dieser Gleichung ist, so ist auch $\varepsilon:\alpha$ eine Wurzel derselben.

Setzt man $x+\frac{\varepsilon}{x}=u$, folglich (Allg. Arithm. §. 9, 5)

$$x^2+\frac{\varepsilon^2}{x^2}=u^2-2\varepsilon$$

$$x^3+\frac{\varepsilon^3}{x^3}=u^3-3u\varepsilon$$

$$x^4+\frac{\varepsilon^4}{x^4}=u^4-4u^2\varepsilon+2\varepsilon^2$$

u. s. w., so erhält man die Resolvente $n$ten Grades für u

$$a_n+a_{n-1}u+a_{n-2}(u^2-2\varepsilon)+a_{n-3}(u^3-3u\varepsilon)+..=0$$

*) Nach Euler Comm. Petrop. 1738 t. 6 p. 223 und Maclaurin Tract. 8. Die Bildung der Resolvente fällt mit der von Jac. Bernoulli (Mém. de Paris 1702. Opp. II n° 97) gegebenen Entwickelung von $\cos kx$ nach Potenzen von $\cos x$ zusammen, und war auch von Moivre (Misc. anal. III, 4) gezeigt worden. Den hierzu erforderlichen Ausdruck von x^k+y^k durch $x+y$ und xy hat Lagrange (Mém. de Berlin 1768. Nouvelle méthode etc. §. 1) als besondern Fall eines allgemeinern Ausdrucks dargestellt.

Aus der quadratischen Gleichung für x

$$x^2 - ux + \varepsilon = 0$$

findet man zu jeder Wurzel u der Resolvente ein Paar Wurzeln der gegebenen Gleichung.

10. Wenn unter den Coefficienten der Gleichung $(2n+1)$ten Grades

$$a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \ldots + a_{2n} x + a_{2n+1} = 0$$

die ersten $n+1$ willkürlich, die folgenden aber so gegeben sind, daß

$$a_{n+1} = a_n \varepsilon,\quad a_{n+2} = a_{n-1}\varepsilon^3,\ \ldots,\ a_{n+1+k} = a_{n-k}\varepsilon^{2k+1},\ \ldots$$

ist, so hat eine Wurzel der Gleichung den Wert $-\varepsilon$, und die übrigen Wurzeln sind so gepaart, daß das Produkt jedes Paares ε^2 ergiebt. Denn das Polynomium

$$a_0(x^{2n+1} + \varepsilon^{2n+1}) + a_1 x(x^{2n-1} + \varepsilon^{2n-1}) + a_2 x^2(x^{2n-3} + \varepsilon^{2n-3}) + \ldots$$

ist durch $x+\varepsilon$ teilbar (Allg. Arithm. §. 12, 5). Der Quotient ist

$$\begin{array}{l|l|l|l} a_0 x^{2n} - a_0\varepsilon & x^{2n-1} + a_0\varepsilon^2 & x^{2n-2} - \ldots - a_0\varepsilon & \varepsilon^{2n-2}x + a_0\varepsilon^{2n} \\ \quad + a_1 & \quad - a_1\varepsilon & \quad + \ldots + a_1 & \\ & \quad + a_2 & \quad - \ldots & \\ & & \quad + \ldots & \end{array}$$

Setzt man nun sowohl den Divisor $x+\varepsilon$, als auch den Quotienten der Null gleich, so erhält man als Wurzeln der gegebenen Gleichung $-\varepsilon$ und die Wurzeln einer besondern Gleichung $2n$ten Grades, deren Coefficienten den vorher (9) gestellten Bedingungen genügen.

11. Die gebrochne Funktion mit positiven Zählern

$$y = \frac{a^2}{\alpha - x} + \frac{b^2}{\beta - x} + \frac{c^2}{\gamma - x} + 1 \quad (\alpha < \beta < \gamma)$$

ist 1 bei unendlichem x, ∞ bei $x = \alpha, \beta, \gamma$, übrigens in stetem Wachsen bei wachsendem x. Während x von $-\infty$ bis α geht, ist $\alpha - x$ positiv, und die Funktion wächst von 1 bis ∞. Während x von α bis β geht, ist $\alpha - x$ negativ, $\beta - x$ positiv, und die Funktion wächst von $-\infty$ bis $+\infty$. Während x von β bis γ geht, ist $\beta - x$ negativ, $\gamma - x$ positiv, und die Funktion wächst von $-\infty$ bis $+\infty$. Während x von γ bis ∞ geht, ist $\gamma - x$ negativ, und die Funktion wächst von $-\infty$ bis 1.

Die Gleichung $y = 0$ für die Unbekannte x ist dadurch ausgezeichnet, daß sie lauter reale Wurzeln hat, je eine zwischen α, β, γ, ∞ *).

§. 8. Transscendente Gleichungen und Auflösung numerischer Gleichungen.

(Heis §§. 106. 100.)

1. Die einfachste Klasse von transscendenten Gleichungen bilden die Exponentialgleichungen, in denen unbekannte Exponenten bekannter oder unbekannter Dignanden vorkommen, die logarithmischen Gleichungen, in denen Logarithmen unbekannter Zahlen vorkommen, und die goniometrischen Gleichungen, in denen goniometrische (trigonometrische) Funktionen unbekannter Winkel (Arcus) vorkommen.

Wenn die Exponentialgleichung binomisch ist und nur bekannte Dignanden enthält, so kann sie auf eine algebraische Gleichung reduciert werden. Denn aus der Gleichung

$$a^p b^q : c^r d^s = 1$$

folgt (Allg. Arithm. §. 19) die Gleichung

$$p \log a + q \log b - r \log c - s \log d = \log 1$$

welche algebraisch ist, wenn a, b, c, d gegeben sind, und p, q, r, s algebraische Funktionen von einer oder mehr Unbekannten bedeuten. Dabei ist $\log 1$ unendlichdeutig (Allg. Arithm. §. 31).

Umgekehrt ist die Gleichung $p \log t + q \log u = r \log v$ gleichbedeutend mit der Gleichung $t^p u^q = v^r$, welche algebraisch ist, wenn p, q, r rational gegeben, und t, u, v algebraische Funktionen von einer oder mehr Unbekannten sind.

Die Exponentialgleichung $a + bp^{\beta x} + cp^{\gamma x} + \ldots = 0$ wird durch die Substitution $p^x = y$ auf die Gleichung $a + by^\beta + cy^\gamma + \ldots = 0$ reduciert.

Die Gleichung $x^{a+b\log x} = c$ oder $(a + b \log x) \log x = \log c$ wird durch die Substitution $\log x = y$ auf die Gleichung $ay + by^2 = \log c$ reduciert**).

---

*) Jacobi Crelle J. 12 p. 25. Dynamik p. 199.
**) Heis §§. 61. 65. 69. 73.

2. Goniometriſche Gleichungen ſind algebraiſch reducibel, wenn ſie nach gehöriger Entwickelung nur eine Funktion eines unbekannten Winkels und Potenzen derſelben mit gegebenen Exponenten enthalten. Z. B. Die Gleichung $a\sin x + b\cos x = c$ kann reduciert werden, indem man $\sin x = y$, $\cos x = \sqrt{1-y^2}$ ſetzt. Einfacher kommt man zum Ziele, wenn man

$$a = r\cos\alpha, \quad b = r\sin\alpha$$

ſetzt, ſo daß α und r aus den Gleichungen

$$\cot\alpha = \frac{a}{b}, \quad r = \frac{a}{\cos\alpha}$$

gefunden werden. Dadurch erhält man ſtatt der gegebenen Gleichung

$$r\sin x\cos\alpha + r\sin\alpha\cos x = c$$

$$\sin(x+\alpha) = \frac{c}{r}$$

woraus ſich zwei ſupplementäre Werte von $x+\alpha$ ergeben.

Die Gleichung $\sin x = a\sin(\alpha - x)$ wird reduciert, indem man

$$x = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$
$$\alpha - x = \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

ſetzt, und die Gleichung $\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = a\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ entwickelt. Man erhält

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta = \frac{a-1}{a+1}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha$$

und findet daraus 2 um 180^0 verſchiedene Werte von $\frac{1}{2}\beta$, und durch Addition derſelben zu $\frac{1}{2}\alpha$ die Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Um das Syſtem (Gauß theoria motus 78)

$$x\sin(\alpha - y) = a$$
$$x\sin(\beta - y) = b$$

für x und y aufzulöſen, bilde man

$$\sin(\alpha-y) + \sin(\beta-y) = 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-2y)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{a+b}{x}$$

$$\sin(\alpha-y) - \sin(\beta-y) = 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-2y)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{a-b}{x}$$

und daraus durch Diviſion

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-2y) = \frac{a+b}{a-b}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

zur Berechnung von y, aus deſſen Wert x ſich ergiebt.

3. Transſcendente Gleichungen, welche ſich auf algebraiſche nicht reducieren laſſen, ſind z. B. $a^x + b^x = c$, $a^x = bx + c$, $x^x = a$, $ax + b\log x + cx\log x = 0$, $\cos x = x$, $\cot x = x$, $\tang x = x$, $x - a\sin x = b$, u. ſ. f. In den angeführten goniometriſchen Gleichungen bedeutet die Zahl x den Arcus eines Winkels d. h. das Verhältnis des eingeſchriebenen Kreisbogens zum Radius, oder den Kreisbogen ſelbſt, wenn der Radius eine Längeneinheit iſt. Wenn der Centriwinkel y Grad und den Arcus x hat, ſo iſt

$$x = \frac{y\pi}{180},\quad \log x = \log y + 8{,}2419 - 10$$

Und wenn der Centriwinkel y Minuten hat, ſo iſt

$$x = \frac{y\pi}{180 \,.\, 60'},\quad \log x = \log y + 6{,}4637 - 10$$

Die Zahlen $\log(\pi : 180)$ und $\log(\pi : 180 \,.\, 60)$ werden in den Tabellen durch $\log 1^0$ und $\log 1'$ bezeichnet.

4. Die realen Wurzeln von Gleichungen beliebiger Art können mit jeder erforderlichen Genauigkeit begrenzt werden, wenn die Gleichungen numeriſch (numerales) ſind d. h. wenn in ihnen unbeſtimmte Daten nicht vorkommen. Um zu erkennen, bei welchen realen x die gegebene Funktion $f(x)$ verſchwindet, berechne man die Anfänge einer Tabelle, welche neben realen x die entſprechenden Werte $f(x)$ enthält. Wenn nun in der Tabelle auf den Wert $f(a)$ ein Wert $f(b)$ von entgegengeſetztem Zeichen folgt, und $f(x)$ von $f(a)$ zu $f(b)$ ſtetig und ohne Umkehr übergeht, während x von a zu b übergeht, ſo hat die Gleichung $f(x) = 0$ eine (und nicht mehr als eine, einfache oder mehrfache) zwiſchen a und b liegende Wurzel (§. 2, 4). Um dieſe Wurzel enger zu begrenzen, vervollſtändige man die Tabelle durch Berechnung von $f(x)$ für Werte von x zwiſchen a und b. Dieſe Arbeit wird weſentlich erleichtert und auf das Nötigſte beſchränkt durch Anwendung der regula falsorum, wie die Algebriſten des 15ten und 16ten Jahrhunderts gezeigt haben. Vergl. Euler Introd. I cap. 22. Die geſuchte Differenz der Variablen iſt nämlich um ſo genauer proportional der erforderlichen Differenz der Funktion, je kleiner die letztere Differenz iſt (§. 2, 5).

Beiſpiel 1. Um die Gleichung $10^x = x^{10}$ aufzulöſen, nimmt man die Logarithmen beider Seiten und erhält $x = 10\log x$, $10\log x - x = 0$. Bezeichnet man die Funktion $10\log x - x$ durch y, und berechnet die Werte von y für $x = 0, 1, 2$, welche in der nachſtehenden Tabelle

x	y
0	$-\infty$
1	-1
2	1,01

enthalten sind, so erkennt man, daß y verschwindet bei einem Wert von x zwischen 1 und 2, daß der Änderung von y um 2,01 die Änderung von x um 1 entspricht. Nach der Regel entspricht dann der Änderung von y um 1 die Änderung von x um ungefähr

$$\frac{1 \cdot 1}{2{,}01} = 0{,}4$$

Demnach berechnet man neue Werte von y, aus denen man erkennt,

x	y
1,4	0,061
1,3	$-0{,}160$

daß y verschwindet bei einem Wert von x zwischen 1,4 und 1,3; daß der Änderung von y um 0,221 die Änderung von x um 0,1 entspricht. Also entspricht der Änderung von y um 0,061 die Änderung von x um

$$\frac{0{,}1 \cdot 0{,}061}{0{,}221} = 0{,}028$$

welche auf $x = 1{,}4 - 0{,}028 = 1{,}372$ hinzeigt. Nun berechnet man neue Werte von y, welche zu erkennen geben, daß y verschwindet bei

x	y
1,372	0,0015
1,371	$-0{,}0006$

einem Wert von x zwischen 1,372 und 1,371, daß der Änderung von y um 0,0021 die Änderung von x um 0,001 entspricht. Demnach entspricht der Änderung von y um 0,0006 die Änderung von x um

$$\frac{0{,}001 \cdot 0{,}0006}{0{,}0021} = 0{,}0003$$

welche $x = 1{,}3713$ als die gesuchte Wurzel anzeigt. Zu größerer Annäherung führen ausführlichere Tabellen der Logarithmen. Die Annäherung an die Wurzel ist beschleunigt: aus den richtigen Stellen der Wurzel findet man durch eine Operation die nahe gleiche Menge folgender Stellen.

Beispiel 2. Die Gleichung $5^x + 6^x = 7x^2$ hat eine Wurzel zwischen 0 und -1, denn $5^x + 6^x - 7x^2$ hat für $x = 0$ den Wert 2, für $x = -1$ den Wert $-6\frac{1}{30}$. Setzt man

$$\log(5^x + 6^x) - \log x^2 - \log 7 = y$$

so erhält man folgendes System:

x	y
$-0{,}3$	0,2803
$-0{,}4$	$-0{,}0434$
$-0{,}387$	$-0{,}0050$
$-0{,}3853$	$-0{,}0002$

Damit y verschwindet, ist die Variable von $-0{,}4$ nach $-0{,}3$ um $\frac{0{,}1 \cdot 434}{3237} = 0{,}013$ zu ändern. Ferner ist x von $-0{,}4$ nach $-0{,}387$ um $\frac{0{,}013 \cdot 50}{384} = 0{,}0017$ zu ändern, wodurch man eine Wurzel der gegebenen Gleichung zwischen $-0{,}3853$ und $-0{,}3852$ findet.

Beispiel 3. Um die Gleichung $\cos x = x$ aufzulösen, setze man $\log x - \log\cos x = z$. Unter Zuziehung des Winkels y (3) findet man folgendes System:

y	z
45^0	0,0456
40^0	$-0{,}0403$
$42^0\ 20'$	$-0{,}0003$
$42^0\ 21'$	0,0000

Der Winkel ist von 45^0 nach 40^0 um $\frac{5^0 \cdot 403}{859} = 2^0{,}33$ zu ändern, damit z verschwindet, u. s. w. Aus dem letzten Wert von y wird der gesuchte Wert von x berechnet.

Beispiel 4. Wenn eine Versorgungsanstalt p Procent jährlich zu kapitalisierende Zinsen berechnet und 100 Gulden gegen eine 35jährige Rente von 6 Gulden zahlt, so ist $\frac{6}{p}(1 - 1{,}0p^{-35}) = 1$ (Allg. Arithm. §. 22, 6). Setzt man $\log 6 + \log(1 - 1{,}0p^{-35}) - \log p = y$, so ergiebt sich eine reale Wurzel der Gleichung aus folgendem System:

p	y
4	0,0492
5	$-0{,}0076$
4,87	$-0{,}0005$
4,86	0,0001

Damit y verschwindet, hat man p von 5 nach 4 um $\frac{76}{568} = 0{,}13$ zu ändern; ferner von 4,86 nach 4,87 um $\frac{0{,}01}{6} = 0{,}002$. Die gesuchte Wurzel hat demnach den Wert 4,862.

Hierher gehört auch Gauß' Auflösung der trinomischen Gleichungen (Beiträge zur Theorie der algebr. Gleich. 1849. Gött. Abhandl. IV. Werke 3 p. 85).

5. Bei algebraischen Gleichungen läßt sich statt der vorigen allgemeinen Methode eine beträchtlich einfachere anwenden, welche Newton (Brief an Oldenburg 1676 Jun. 13, ausführlicher im Anfang der methodus fluxionum) gelehrt hat.

Statt einer über 10 betragenden Wurzel kann ihr 10ter, 100ter, .. Teil gesucht werden (§. 7, 1), so daß nächst den Einern der Wurzel ein echter Bruch durch Transformationen der gegebenen Gleichung zu bestimmen bleibt.

Beispiel 1. $y = x^3 - 2x - 5$ geht aus dem Negativen ins Positive, während x von 2 bis 3 steigt. Also hat die Gleichung $y = 0$ eine reale Wurzel $x = 2 + p$, wobei p einen näher zu berechnenden positiven echten Bruch bedeutet. Durch die Substitution $x = 2 + p$ findet man (nach dem §. 7, 2 angezeigten Verfahren) die erste Transformierte

$$y = -1 + 10p + 6p^2 + p^3$$

deren Anfangsglieder überwiegen. Um den Wert von p zu berechnen, bei welchem $y = 0$ wird, macht man den Versuch

$$-1 + 10p = 0, \quad p = 0{,}1\ldots, \quad 6p^2 + \ldots = 0{,}06\ldots$$

so daß bei unsichern Hunderteln des Dividenden

$$p = 1{,}0\ldots : 10 = 0{,}1 + q$$

gesetzt wird. Durch diese Substitution findet man die zweite Transformierte

$$y = 0{,}061 + 11{,}23q + 6{,}3q^2 + q^3$$

Der Versuch $0{,}061 + 11{,}23q = 0$, $q = -0{,}005\ldots$, $6{,}3q^2 + \ldots = 0{,}0001\ldots$ giebt bei unsichern Zehntausendteln des Dividenden

$$q = -0{,}061\ldots : 11{,}23 = -0{,}0054 + r$$

Durch diese Substitution findet man die dritte Transformierte, und zwar abgekürzt, indem man die Potenzen von q nach steigenden Potenzen von r entwickelt,

$$\begin{array}{rl} y = & 0{,}061 \\ & -0{,}060642 \quad + 11{,}23r \\ & +0{,}000183708 - 0{,}0680r\ * \\ & -0{,}000000157 + 0{,}0001r\ * \\ \hline & 0{,}000541551 + 11{,}1621r\ * \end{array}$$

Der Versuch $0{,}000541551 + 11{,}1621r = 0$ giebt $r = -0{,}000048516$. Also ist

$$\begin{array}{rl} x = & 2{,}1 \\ & -0{,}0054 \\ & -0{,}000048516 \\ \hline & 2{,}094551484 \end{array}$$

Beispiel 2. $y = x^5 - 6x - 10$ geht aus dem Negativen ins Positive, während x von 1 bis 2 steigt. Also hat die Gleichung $y = 0$ die Wurzel $x = 2 + p$. Durch diese Substitution findet man die erste Transformierte

$$y = 10 + 74p + 80p^2 + 40p^3 + 10p^4 + p^5$$

Der Verſuch $10 + 74p = 0$ giebt $p = -0{,}13$ mit geringer Annäherung, weil $80p^2 + \ldots = 1{,}3\ldots$ Durch den Verſuch $10 + 74p + 80p^2 = 0$ findet man den genauern Wert $p = -0{,}16\ldots$ nebſt $40p^3 + \ldots = -0{,}16\ldots$ Daher bildet man durch die Subſtitution $p = -0{,}16 + q$ die zweite Transformierte abgekürzt

$$\begin{array}{rrrr} y = & 10 & & \\ & -11{,}84 & +74q & \\ & +2{,}048 & -25{,}6q & +80q^2 \\ & -0{,}16384 & +3{,}072q & -19{,}2q^2 \ * \\ & +0{,}0065536 & -0{,}1638q & +1{,}5q^2 \ * \\ & -0{,}0001048 & +0{,}0033q & * \quad * \\ \hline & 0{,}0506088 & +51{,}3114q & +62{,}3q^2 \ * \end{array}$$

Der Verſuch $0{,}050\ldots + 51{,}\ldots q = 0$ giebt

$$q = -0{,}001\ldots \text{ und } 62{,}3q^2 + \ldots = 0{,}00006\ldots$$

Alſo ſetzt man

$$q = -0{,}0506 : 51{,}3 = -0{,}000986 + r$$

und bildet die dritte Transformierte

$$\begin{array}{rrr} y = & 0{,}0506088 & \\ & -0{,}0505930 & +51{,}3r \\ & +0{,}0000604 & -0{,}1r \\ \hline & 0{,}0000762 & +51{,}2r \end{array}$$

welche bei $r = -0{,}00000149$ verſchwindet. Daher iſt

$$\begin{array}{rr} x = & 2 \\ & -0{,}16 \\ & -0{,}000986 \\ & -0{,}00000149 \\ \hline & 1{,}83901251 \end{array}$$

Beiſpiel 3. $y = x^3 - 7x + 7$ verſchwindet zweimal, während x von 1 bis 2 ſteigt. Durch die Subſtitution $x = 1{,}5 + p$ erhält man die erſte Transformierte

$$y = -0{,}125 - 0{,}25p + 4{,}5p^2 + p^3$$

und $-0{,}125 - 0{,}25p + 4{,}5p^2 = 0$ giebt $p = 0{,}2$ und $-0{,}14$.

I. Durch die Subſtitution $p = 0{,}2 + q$ erhält man

$$y = 0{,}013 + 1{,}67q + 5{,}1q^2 + q^3$$

Der Verſuch $0{,}013 + 1{,}67q = 0$ giebt

$q = -0{,}013 : 1{,}67 = -0{,}008 + r$, weil $5{,}1q^2 + \ldots = 0{,}0003\ldots$

Aus den Transformierten

$$y = -0{,}000034112 + 1{,}588592r + 5{,}076r^2 + r^3$$

ſchließt man

$$r = 0{,}00003411 : 1{,}5886 = 0{,}00002148$$
$$x = 1{,}69202148$$

II. Durch die Subſtitution $p = -0{,}14 + q$ erhält man

$$y = -0{,}004544 - 1{,}4512q + 4{,}08q^2 + q^3$$

Der Verſuch $-0{,}004544 - 1{,}4512q = 0$ giebt

$q = -0{,}0045 : 1{,}45 = -0{,}0031$, weil $4{,}08q^2 + \ldots = 0{,}00003\ldots$

$$x = 1{,}3569$$

Beiſpiel 4. $6x^3 - 141x + 263$ verſchwindet zweimal, während x von 2 bis 3 ſteigt. Durch die Subſtitution $x = 2{,}8 + p$ erhält man

$$y = -0{,}088 + 0{,}12p + 50{,}4p^2 + 6p^3$$

Der Verſuch $-0{,}088 + 0{,}12p + 50{,}4p^2 = 0$ giebt $p = 0{,}03$ und $-0{,}05$.

I. Durch die Subſtitution $p = 0{,}03 + q$ erhält man

$$y = -0{,}038878 + 3{,}1602q + 50{,}94q^2 + 6q^3$$

Der Verſuch $-0{,}038878 + 3{,}1602q = 0$ giebt nur

$q = 0{,}01 + r$, weil $50{,}94q^2 + \ldots = 0{,}005\ldots$

Aus der Transformierten

$$y = -0{,}002176 + 4{,}1808r + 51{,}12r^2 + 6r^3$$

folgt $r = 0{,}0005$, weil $51{,}12r^2 + \ldots = 0{,}00001\ldots$ Die nächſte Transformierte

$$y = -0{,}00007281925 + 4{,}2319245s + 51{,}129s^2 + 6s^3$$

giebt $s = 0{,}00001721$, weil $51{,}1s^2 + \ldots = 0{,}000000005\ldots$, ſo daß

$$x = 2{,}84051721$$

II. Durch die Subſtitution $p = -0{,}05 + q$ erhält man

$$y = 0{,}03125 - 4{,}875q + 49{,}5q^2 + 6q^3$$

Hieraus folgt $q = 0{,}007 + r$, weil $49{,}5q^2 + \ldots = 0{,}002\ldots$ Die nächſte Transformierte

$$y = -0{,}000447442 - 4{,}181118r + 49{,}626r^2 + 6r^3$$

giebt $r = -0{,}000107$, weil $49{,}6r^2 + \ldots = 0{,}0000005\ldots$, ſo daß

$$x = 2{,}756893$$

Anmerkung. Newtons Methode hat durch Euler, Lagrange u. a. eine angeblich einfachere Darſtellung erhalten, indem man für die Korrektionen $p, q, \ldots$ eine allgemeine Formel aufſtellte. Nur dieſe in der Praxis mühevollere Darſtellung wird von den Einwendungen getroffen, welche Lagrange (Mém. de Berlin 1767 p. 311, Traité des équat. Note V) gegen die Newtonſche Methode erhoben hat Vergl. den Aufſatz des Verf. in den Leipziger Berichten 1866 p. 358.

Die beschleunigte Annäherung, welche Newtons Methode gewährt, wird nicht in gleicher Weise geleistet durch W. G. Horners (Philos. Trans. 1819 p. 308) und ähnliche Methoden z. B. Obstreil Programm Teschen 1878:

Wenn $x^2 + Ax = B$ und x die positive Decimalzahl $a, b..$ ist, so findet man

a aus $B : A$ bei positivem Rest $B - (a + A)a$

b aus $B - (a + A)a : (2a + A)$

u. s. w., weil $(a + b)^2 + A(a + b) = B$, folglich

$$b^2 + b(2a + A) = B - (a + A)a$$

Wenn $x^3 + Ax^2 + Bx = C$, so findet man

a aus $C : B$

b aus $C - (a^2 + aA + B)a : (3a^2 + 2aA + B)$

u. s. w., weil $(a + b)^3 + A(a + b)^2 + B(a + b) = C$, folglich $b^3 + b^2(3a + A) + b(3a^2 + 2aA + B) = C - (a^2 + aA + B)a$. U. s. w.

Die realen Wurzeln einer Gleichung für x sind graphisch bestimmt worden (seit Archimedes) als die Abscissen der gemeinschaftlichen Punkte von zwei konstruierten Kurven. Z. B. die Gleichung

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + .. = 0$$

ist die Resultante des Systems

$$y = x^3,\ 0 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + (a_3 + a_4x + a_5x^2)y + (a_6 + a_7x + a_8x^2)y^2 + ..$$

Man zeichnet die Linie $y = x^3$ für alle Fälle. Die Gleichung der andern Linie ist für x zweiten Grades. Vergl. Newton Enumeratio VII.

§. 9. Besondere Auflösung unbestimmter Gleichungen.

(Heis §§. 77–80.)

1. Eine unbestimmte Gleichung oder ein unbestimmtes System von Gleichungen hat unendlich viele Lösungen (§. 5). Wenn insbesondere die Coefficienten der Gleichungen ganze (rationale) Zahlen sind, so entsteht die Frage, durch welche ganze (rationale) Werte der Unbekannten den Gleichungen genügt werden kann (Diophantische Aufgabe). Die Beantwortung dieser Frage ist der Gegenstand der unbe-

stimmten Analytik (analyse indéterminée), welche mit der höheren Arithmetik (Zahlenlehre) im engsten Zusammenhange steht.

2. Wenn a und b ganze Zahlen und prim zu einander sind, so lassen sich unendlich viele Systeme ganzer Zahlen x, y angeben, die der linearen Gleichung $ax + by = c$ genügen. Man bilde nach dem Modul b die Reste den Zahlen c, $c - a$, $c - 2a$, .., $c - (b - 1)a$. Diese b Reste sind von einander verschieden (Allg. Arithm. §. 13, 19) und geringer als b, also muß einer derselben 0 sein. Hat $c - ax$ nach dem Modul b den Rest 0, so ist der Quotient eine ganze Zahl y. Wenn aber x und y der gegebenen Gleichung genügen, so genügen ihr auch $x + bz$ und $y - az$, weil

$$a(x + bz) + b(y - az) = ax + by = c$$

Wenn δ der größte gemeinschaftliche Divisor der Zahlen a und b ist, so giebt es keine ganzen Zahlen x und y, welche der Gleichung $ax + by = c$ genügen, außer in dem Falle, daß auch c durch δ teilbar ist. Wenn nun x und y der gegebenen Gleichung genügen, so genügen ihr auch $x + \frac{b}{\delta}z$ und $y - \frac{a}{\delta}z$, und es giebt δ Werte von x, die nach dem Modul b inkongruent sind, und ebensoviel nach dem Modul a inkongruente Werte von y.

3. Um die Gleichung $ax + by = c$ in ganzen Zahlen aufzulösen, wählt man, wenn a prim zu b und $a < b$, die Anordnung $ax = c - by$, woraus durch Division

$$x = d - ey + \frac{c_1 - a_1 y}{a}$$

folgt. Weil aber $c_1 - a_1 y$ durch a teilbar sein soll, so setzt man

$$c_1 - a_1 y = ap, \quad a_1 y = c_1 - ap$$

und findet wiederum durch Division

$$y = d_1 - e_1 p + \frac{c_2 - a_2 p}{a_1}$$

wobei $c_2 - a_2 p$ durch a_1 teilbar sein soll, u. s. w. Die Reihe der Reste a_1, a_2, .. fällt bis auf 1 herab (Allg. Arithm. §. 13, 3), und dabei geht die Reihe der erforderlichen Substitutionen zu Ende. Durch einen besondern Wert der letzten Unbestimmten werden dann alle vorausgehenden Unbestimmten ausgedrückt. Die Anzahl der Divisionen wird möglichst klein, wenn man die kleinsten (nach Befinden negativen) Reste gebraucht.

Beispiel 1.

$$\begin{array}{l|l} 7x = 1000 - 24y & x = 143 - 3y - \frac{3y+1}{7} \\ 3y = -1 + 7p & y = 2p + \frac{p-1}{3} \\ & p = 1 + 3q \end{array}$$

Insbesondere ist $p = 1$, $y = 2$, $x = 136$, also allgemein (2)

$$x = 136 - 24q, \quad y = 2 + 7q$$

worin q jede ganze Zahl (positiv oder negativ) bedeutet.

Beispiel 2. Um 243 in 2 Teile zu teilen, von denen der eine durch 24, der andere durch 65 teilbar ist, setze man den ersten Teil $= 24x$, den zweiten Teil $= 65y$, und $24x + 65y = 243$.

$$\begin{array}{l|l} 24x = 243 - 65y & x = 10 - 3y + \frac{7y+3}{24} \\ 7y = 3(-1 + 8p) & y = 3\left(p + \frac{p-1}{7}\right) \\ & p = 1 + 7q \end{array}$$

Für $q = 0$ erhält man $p = 1$, $y = 3$, $x = 2$, folglich überhaupt

$$y = 3 + 24q, \quad x = 2 - 65q$$

Die vorgelegte Aufgabe hat nur eine Auflösung in positiven ganzen Zahlen. Mit dieser Aufgabe trifft die Forderung zusammen, den Bruch $\frac{243}{24 \cdot 65}$ in die Summe von zwei Brüchen zu zerlegen, deren Nenner 65 und 24 sind.

Beispiel 3. Um die Zahlen zu finden, welche nach dem Modul 27 den Rest 14, nach dem Modul 37 den Rest 25 haben, setze man $27x + 14 = 37y + 25$.

$$\begin{array}{l|l} 27x = 11 + 37y & x = y + \frac{10y+11}{27} \\ 10y = -11 + 27p & y = -1 + 3p - \frac{3p+1}{10} \\ 3p = -1 + 10q & p = 3q + \frac{q-1}{3} \\ & q = 1 + 3r \end{array}$$

Für $r = 0$ erhält man $q = 1$, $p = 3$, $y = 7$, $x = 10$, also überhaupt

$$y = 7 + 27r, \quad x = 10 + 37r$$

Die gesuchten Zahlen sind

$$37(7 + 27r) + 25 = 27(10 + 37r) + 14 = 284 + 999r$$

4. Die zur Auflösung der Gleichung $ax - by = c$ gebildete Kette von Gleichungen

$$\begin{array}{ll} ax = by + c & x = ey + p \\ a_1 y = ap + c & y = e_1 p + q \\ a_2 p = a_1 q + c & p = e_2 q + r \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

beruht auf der Kette von Gleichungen

$$\begin{array}{l} b = ae + a_1 \\ a = a_1 e_1 + a_2 \\ a_1 = a_2 e_2 + a_3 \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

durch welche der Bruch $a : b$ in einen Kettenbruch so entwickelt wird, daß die Zähler der Glieder positive oder negative Einheiten sind. Ist nun z. B. a_3 eine Einheit, so kann man $r = 0$ wählen und erhält die besondern Werte q', p', y', x' für q, p, y, x von der Art, daß

$$\frac{q}{p'} = \frac{1}{e_2}, \quad \frac{p'}{y'} = \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2}, \quad \frac{y'}{x'} = \frac{1}{e} + \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2}$$

Daher ist der letzte Näherungsbruch $\frac{\lambda}{\mu}$ für den Kettenbruch

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{e} + \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} + \frac{1}{a_2}$$

ein besonderer Wert von $\frac{y}{x}$. In der That hat man unter dieser Voraussetzung (Allgem. Arithm. §. 30, 4)

$$a\mu - b\lambda = \varepsilon, \quad \varepsilon^2 = 1$$
$$a \,.\, \varepsilon c\mu - b \,.\, \varepsilon c\lambda = c$$

Also genügen der gegebenen Gleichung die Werte*)

$$x = \varepsilon c\mu + bz, \quad y = \varepsilon c\lambda + az$$

*) Die Auflösung der Gleichung $ax \pm by = 1$ in ganzen Zahlen, die elementarste unter den Diophantischen Aufgaben, ist in den übrig gebliebenen Schriften Diophants nicht anzutreffen, sondern im Occident zuerst von Bachet (problêmes plaisans 1624) gegeben worden. Mit Bachets Auflösung fällt in der Hauptsache Eulers Auflösung zusammen (Comm. Petrop. 7 p. 46), welche oben (3) mitgeteilt ist und die Vorzüge der Einfachheit und Kürze in sich vereint. Die Darstellung der Auflösung durch Kettenbrüche (4) hat Lagrange (Mém. de Berlin 1767 p. 175) gelehrt. Vergl. die franz. Ausgabe von Eulers Algebra, Lyon 1795, und Gauß Disq. arithm. 27 ff. Die Anwendung des Fermatschen Satzes ist von Binet 1831 erdacht (J. de l'école polyt. Cah. 20 p. 289).

Wenn a prim zu b, und wenn es s Zahlen giebt, welche kleiner als b und prim zu b sind, so ist $a^s - 1$ durch b teilbar (Allgem. Arithm. §. 13, 21). Nun ist identisch

$$aa^{s-1} - b\frac{a^s - 1}{b} = 1$$

$$aca^{s-1} - bc\frac{a^s - 1}{b} = c$$

folglich $ax - by = c$, wenn überhaupt

$$x = ca^{s-1} + bz, \quad y = c\frac{a^s - 1}{b} + az$$

5. Das System von Gleichungen

$$\begin{aligned} au &= b + cx \\ a_1 u &= b_1 + c_1 y \\ a_2 u &= b_2 + c_2 z \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

ist in ganzen Zahlen nur dann auflösbar, wenn a und c, a_1 und c_1, a_2 und c_2, .. prim zu einander sind. Wenn die Zahl u dem gegebenen System genügt, und wenn d den kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus der Zahlen c, c_1, c_2, .. bedeutet, und v eine willkürliche Zahl, so genügt auch $u + dv$ demselben System. Denn nach der Voraussetzung ist $au - b$ durch c teilbar, $a_1 u - b_1$ durch c_1 teilbar, u. s. w. Also ist auch $au + adv - b$ durch c teilbar, $a_1 u_1 + a_1 dv - b_1$ durch c_1 teilbar, u. s. w.

Aus der ersten Gleichung findet man $v = \alpha + cp$. Durch diese Substitution erhält man die zweite Gleichung

$$ca_1 p = b_1 - \alpha a_1 + c_1 y$$

$$p = \beta + \frac{c_1}{\delta_1} q, \qquad u = \alpha_1 + c\frac{c_1}{\delta_1} q$$

wenn δ_1 der größte gemeinschaftliche Divisor von c und c_1 ist. Durch diese Substitution erhält man die dritte Gleichung

$$c\frac{c_1}{\delta_1} a_2 q = b_2 - \alpha_1 a_2 + c_2 z$$

$$q = \beta_1 + \frac{c_2}{\delta_2} r, \qquad u = \alpha_2 + c\frac{c_1}{\delta_1}\frac{c_2}{\delta_2} r$$

wenn δ_2 der größte gemeinschaftliche Divisor von $c\frac{c_1}{\delta_1}$ und c_2 ist. U. s. w.

Beispiel 1. Die Zahl u soll so bestimmt werden, daß $121u$ nach dem Modul 504 den Rest 41, $9u$ nach dem Modul 35 den Rest -1, $27u$ nach dem Modul 16 den Rest 11 giebt.

Nun ist $504 = 8 \cdot 9 \cdot 7$, $35 = 7 \cdot 5$; also soll $121u - 41$ durch 8, 9, 7, ferner $9u + 1$ durch 7, 5, endlich $27u - 11$ durch 16 teilbar sein. Diese Forderungen reducieren sich auf folgende:

$u - 1$ soll durch 8, $u + 1$ durch 9, $2u + 1$ durch 7 teilbar sein;
$2u + 1$ soll durch 7, $u - 1$ durch 5 teilbar sein;
$u - 1$ soll durch 16 teilbar sein.

Da nun u der Aufgabe genügt, wenn $u - 1$ durch 80, $u + 1$ durch 9, $2u + 1$ durch 7 teilbar ist, so setze man

$$\begin{aligned} u &= 1 + 80x \\ u &= -1 + 9y \\ 2u &= -1 + 7z \end{aligned}$$

Die erste dieser Gleichungen braucht nicht erst aufgelöst zu werden, und man hat sogleich

$$9y = 2 + 80x \qquad y = 9x - \frac{x-2}{9}$$

$$x = 2 + 9p \qquad u = 161 + 720p$$

Diese Substitution giebt

$$7z = 323 + 1440p \qquad z = \ldots - \frac{2p-1}{7}$$

$$2p = 1 + 7q \qquad p = 3q + \frac{q+1}{2}$$

$$q = -1 + 2r$$

Wenn $r = 0$, so ist $q = -1$, $p = -3$, $u = -1999$; also überhaupt $u = -1999 + 5040p$.

Beispiel 2. Damit die Zahl u nach dem Modul 9 den Rest 5 oder -4, nach dem Modul 10 den Rest 9 oder -1 giebt, und durch 11 teilbar ist, setze man

$$\begin{aligned} u &= -4 + 9x \\ u &= -1 + 10y \\ u &= 11z \end{aligned}$$

Demnach ist

$$9x = 3 + 10y, \quad x = y + \frac{y+3}{9}$$

$$y = -3 + 9p$$

Wenn $p = 0$, so ist $y = -3$, $u = -31$; also überhaupt

$$u = -31 + 90q$$

Dieſe Subſtitution giebt

$$11z = -31 + 90p, \quad z = \ldots + 2\frac{p+1}{11}$$
$$p = -1 + 11q$$

Wenn $q = 0$, ſo iſt $p = -1$, $u = -121$, alſo überhaupt
$$u = -121 + 990q$$

6. Um ein Syſtem von m linearen Gleichungen mit $m+1$ Unbekannten in ganzen Zahlen aufzulöſen, hat man nach Elimination von $m-1$ Unbekannten eine Gleichung mit 2 Unbekannten abzuleiten. Die durch Auflöſung dieſer Gleichung gefundenen Werte der beiden Unbekannten werden in eine der abgeleiteten Gleichungen ſubſtituiert, welche außer jenen beiden Unbekannten eine andere Unbekannte enthält. Die durch Auflöſung dieſer Gleichung gefundenen Werte der drei Unbekannten werden wiederum ſubſtituiert. U. ſ. w.

Beiſpiel 1. Aus den Gleichungen

$$3x + 5y + 7z = 560$$
$$9x + 25y + 49z = 2920$$

ergiebt ſich durch Elimination von z

$$5y = 500 - 6x, \quad y = 100 - x - \frac{x}{5}$$
$$x = 5p, \quad y = 100 - 6p$$

Durch dieſe Subſtitution erhält man aus der erſten gegebenen Gleichung

$$7z = 15(4 + p), \quad z = 15\frac{p+4}{7}$$
$$p = -4 + 7q$$

folglich genügen dem gegebenen Syſtem

$$x = -20 + 35q, \quad y = 124 - 42q, \quad z = 15q$$

mit poſitiven Werten, wenn $q = 1, 2$.

Beiſpiel 2. Aus den Gleichungen

$$4u + 13x + 5y - 2z = 2559$$
$$-5u + 8x + 7y + 3z = 1595$$
$$-7u + 11x - 3y + 5z = 2157$$

findet man die abgeleiteten Gleichungen

$$97x + 53y + 2z = 19175$$
$$135x + 23y + 6z = 26541$$
$$39x + 34y = 7746$$

Die letzte Gleichung giebt durch die Substitution $x = 2p$, $y = 3q$

$$13p = 1291 - 17q, \qquad p = 99 - q - 4\frac{q-1}{13}$$

$$q = 1 + 13r$$

Bei $r = 0$ ist $q = 1$, $p = 98$, also überhaupt

$$x = 196 - 34r, \quad y = 3 + 39r$$

Durch diese Substitution erhält man aus der ersten abgeleiteten Gleichung

$$2z = 4 + 1231r, \quad r = 2s$$

folglich

$$x = 196 - 68s, \quad y = 3 + 78s, \quad z = 2 + 1231s$$

Durch diese Substitution giebt die erste gegebene Gleichung

$$4u - 2956s = 0, \quad u = 739s$$

Das gegebene System hat positive Auflösungen bei $s = 1, 2$.

7. Eine lineare Gleichung mit m Unbekannten ist in ganzen Zahlen auflösbar, wenn die Coefficienten der Unbekannten prim zu einander sind. Die Werte der Unbekannten werden mit Hilfe von $m - 1$ Unbestimmten dargestellt.

Beispiel 1. $5x + 7y + 8z = 50$.

$$5x = 50 - 7y - 8z, \quad x = 10 - y - z - \frac{2y + 3z}{5}$$

$$2y = -3z + 5p, \qquad y = -z + 2p - \frac{z - p}{2}$$

$$z = p + 2q, \quad y = p - 3q, \quad x = 10 - 3p + q$$

Wenn x, y, z positiv sind, so sind $x + 3z = 10 + 7q$ und $x + 3y = 10 - 8q$ positiv, q liegt zwischen $-\frac{10}{7}$ und $+\frac{10}{8}$ und hat die Werte -1, 0, 1. Bei $q = 1$, $p > 3$ wird x negativ. Also findet man positive Auflösungen der gegebenen Gleichung bei

$$q = -1 \qquad p = 0$$
$$q = 0 \qquad p = 1, 2, 3$$

Beispiel 2. $15x + 6y + 20z = 171$.

$$6y = 171 - 15x - 20z, \quad y = 28 - 2x - 3z - \frac{3x + 2z - 3}{6}$$

$$2z = 3 - 3x + 6p \qquad z = 3\left(p - \frac{x-1}{2}\right)$$

$$x = 1 + 2q, \quad z = 3p - 3q, \quad y = 26 + 5q - 10p$$

Die gegebene Gleichung hat positive Auflösungen, wenn $x = 1 + 2q$ und $y + \frac{10}{3}z = 26 - 5q$ positiv sind, also q zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{26}{5}$ liegt und die Werte 0, 1, 2, 3, 4, 5 hat. Bei $q > 3$ wird z oder y negativ. Also findet man positive Auflösungen bei

q	0	0	1	1	2	3
p	1	2	2	3	3	4

8. Um ganze x zu finden, welchen ganze Werte der gebrochnen Funktion

$$y = \frac{cx^2 + dx + e}{ax + b}$$

entsprechen, entwickelt man

$$a^2y = \frac{a^2cx^2 + a^2dx + a^2e}{ax + b} = acx + ad - bc + \frac{a^2e + b^2c - abd}{ax + b}$$

so daß

$$(a^2y - acx - ad + bc)(ax + b) = a^2e + b^2c - abd$$

Ist nun $a^2e + b^2c - abd$ durch Zahlen der Form $ax + b$ teilbar, so ist sie auch durch Zahlen der Form $a^2y - acx - ad + bc$ teilbar. Man hat demnach unter den Divisoren von $a^2e + b^2c - abd$ diejenigen auszusuchen, welche die Form $ax + b$ haben, oder unter den Zahlen der Form $ax + b$ diejenigen, welche in $a^2e + b^2c - abd$ aufgehn.

Beispiel 1. $y = \frac{-x^2 + 2x + 29}{x - 3}$

Man findet nach der Division $(y + x + 1)(x - 3) = 26$, folglich

$x - 3$	1	2	13	26	-1	-2	-13	-26
$y + x + 1$	26	13	2	1	-26	-13	-2	-1

x	4	5	16	29	2	1	-10	-23
y	21	7	-15	-29	-29	-15	7	21

Beispiel 2. $y = \frac{2x + 18}{5x - 3}$

giebt $(5y - 2)(5x - 3) = 96$, folglich

$5x - 3$	2	12	32	-3	-8	-48
$5y - 2$	48	8	3	-32	-12	-2

x	1	3	7	0	-1	-9
y	10	2	1	-6	-2	0

Beispiel 3. $y = \frac{3x^2+1}{2x+1}$

giebt $(4y - 6x + 3)(2x + 1) = 7$, folglich

$2x + 1$	1	7	−1	−7
$4y - 6x + 3$	7	1	−7	−1

x	0	3	−1	−4
y	1	4	−4	−7

9. Um die Gleichung*) $x^2 + y^2 = z^2$ in ganzen Zahlen aufzulösen, setze man

$$t^2 + u^2 = (t + v)^2$$

wodurch man

$$t = \frac{u^2 - v^2}{2v}, \quad t + v = \frac{u^2 + v^2}{2v}$$

findet. Demnach sind bei rationalen u und v

$$\frac{u^2 - v^2}{2v}, \quad u, \quad \frac{u^2 + v^2}{2v}$$

rationale Werte von x, y, z, welche der gegebenen Gleichung genügen. Diese Werte genügen der gegebenen Gleichung auch dann, wenn man sie mit $2v$ multipliciert hat; also sind bei ganzen u und v

$$u^2 - v^2, \quad 2uv, \quad u^2 + v^2$$

ganze Zahlen, welche der gegebenen Gleichung genügen.

Haben u und v den gemeinschaftlichen Divisor m, so haben $u^2 - v^2$, $2uv$, $u^2 + v^2$ den gemeinschaftlichen Divisor m^2.

Sind u und v ungerade, so sind u^2 und v^2 ungerade, $u^2 + v^2$ gerade, und $u^2 - v^2$ durch 8 teilbar, folglich die Werte von x, y, z durch 2 teilbar.

Um also Werte von x, y, z zu erhalten, welche einen gemeinschaftlichen Divisor nicht haben, wählt man für u und v Werte, welche prim zu einander und nicht beide ungerade sind; z. B.

---

*) Die Pythagoreische Gleichung, deren Auflösung Eucl. X, 29. Lemma 1 angegeben ist. Vergl. Grunert Archiv t. 56. Daß die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für $n > 2$ in ganzen Zahlen nicht auflösbar sei, daß also die Summe von zwei $n$ten Potenzen eine $n$te Potenz nicht sein könne, hat Fermat bemerkt (Observ. ad Dioph. Arithm. II, 8). Ein allgemeiner Beweis dieser Bemerkung ist zur Zeit nicht bekannt.

v	1	1	1	..	2	2	2	..	3	3	3 ..
u	2	4	6	..	3	5	7	..	4	8	10 ..
x	3	15	35	..	5	21	45	..	7	55	91 ..
y	4	8	12	..	12	20	28	..	24	48	60 ..
z	5	17	37	..	13	29	53	..	25	73	109 ..

Wie man auch u und v wählen mag, so ist eine der Zahlen x, y durch 3, eine derselben durch 4, ferner eine der Zahlen x, y, z durch 5 teilbar, mithin das Produkt xyz durch 60 teilbar*).

Beweis. Nach dem Modul 3 kongruieren die Zahlen mit einer der Zahlen 0, ± 1, und die Quadrate mit 0, 1. Ist nun weder u noch v durch 3 teilbar, so ist $u^2 - v^2$ durch 3 teilbar.

Wenn u oder v gerade ist, so ist $2uv$ durch 4 teilbar. Wenn u und v beide ungerade sind, so sind x, y, z durch 2 teilbar, und $\frac{1}{2}x$ durch 4 teilbar.

Nach dem Modul 5 kongruieren die Zahlen mit einer der Zahlen 0, ± 1, ± 2, und die Quadrate mit 0, 1, -1. Ist nun weder u noch v durch 5 teilbar, so ist entweder $u^2 - v^2$ oder $u^2 + v^2$ durch 5 teilbar.

10. Die Formel $a + bx + cx^2$ kann bei rationalen Werten von x nicht unbedingt ein Quadrat werden**). Wenn aber insbesondere a oder c ein Quadrat ist, oder wenn die Formel als ein Produkt pq, oder als ein Binomium $p^2 + qr$ darstellbar ist, wobei p, q, r Funktionen von x ersten Grades bedeuten, so findet man geeignete rationale Werte von x auf folgendem Wege.

Wenn $a = \alpha^2$, so setze man $\alpha^2 + bx + cx^2 = (\alpha + ux)^2$, folglich

$$x = \frac{2\alpha u - b}{c - u^2} \qquad \alpha + ux = \frac{\alpha(c + u^2) - bu}{c - u^2}$$

Wenn $c = \gamma^2$, so setze man $a + bx + \gamma^2 x^2 = (u + \gamma x)^2$, folglich

$$x = \frac{a - u^2}{2\gamma u - b} \qquad u + \gamma x = \frac{\gamma(a + u^2) - bu}{2\gamma u - b}$$

Wenn $b^2 - 4ac$ ein Quadrat ist, so kann $a + bx + cx^2$ als Differenz von 2 Quadraten, mithin als Produkt von 2 Funktionen von x ersten Grades dargestellt werden. Setzt man nun

---

*) Frénicle sur les triangles rectangles en nombres 1676 prop. 26—30 (Anc. Mém. de Paris t. V). Gerg. Ann. 20 p. 212. Crelle J. 5 p. 386.

**) Vergl. Euler Introd. I §. 50 und Algebra II, 2.

$$(f + gx)(m + nx) = u^2(f + gx)^2$$

so wird

$$x = \frac{fu^2 - m}{n - gu^2} \qquad u(f + gx) = \frac{(fn - gm)u}{n - gu^2}$$

Wenn $a + bx + cx^2 = p^2 + qr$, worin p, q, r Funktionen von x ersten Grades bedeuten, so setze man

$$p^2 + qr = (p + qu)^2$$

und berechne x aus der Gleichung ersten Grades

$$r = 2pu + qu^2$$

11. Die transscendente Gleichung $x^y = y^x$ kann nach Euler (Introd. II §. 519) dadurch reduciert werden, daß man $y = ux$ setzt. Durch diese Substitution erhält man die Gleichung $(x^u)^x = (ux)^x$, welche in realen Zahlen $x^u = ux$, $x^{u-1} = u$ giebt. Folglich genügen

$$x = u^{\frac{1}{u-1}}, \quad y = uu^{\frac{1}{u-1}}$$

der gegebenen Gleichung. Um dieselbe in rationalen Zahlen aufzulösen, setzt man $u - 1 = \frac{1}{v}$, und erhält

$$x = \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v \qquad y = \left(1 + \frac{1}{v}\right)^{v+1}$$

v	1	2	3	...
x	2	$(\frac{3}{2})^2$	$(\frac{4}{3})^3$	...
y	4	$(\frac{3}{2})^3$	$(\frac{4}{3})^4$	...

§. 10. Lehrsätze von den algebraischen Funktionen.

1. Wenn der Wert $f(x)$ einer gegebenen ganzen Funktion $n$ten Grades dem Wert x der Variablen entspricht, so ist die Differenz $f(x) - f(t)$ durch die entsprechende Differenz $x - t$ teilbar. Der Quotient ist eine ganze Funktion $(n - 1)$ten Grades*).

*) Diese Erweiterung des Satzes von der Teilbarkeit der Differenz $x^k - t^k$ durch $x - t$ kommt im Anfang des 17ten Jahrh. vor. Descartes Géom. III.

Beweis. Aus den Werten

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$
$$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$$

findet man durch Subtraktion

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} = a_n \frac{x^n - t^n}{x - t} + a_{n-1} \frac{x^{n-1} - t^{n-1}}{x - t} + \ldots$$

Nun ist $x^k - t^k$ durch $x - t$ teilbar (Allgem. Arithm. §. 12, 5), folglich u. s. w. Der Quotient

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} = a_n x^{n-1} + a_n t \quad x^{n-2} + a_n t^2 \quad x^{n-3} + \ldots$$
$$+ a_{n-1} \qquad + a_{n-1} t \qquad + \ldots$$
$$+ a_{n-2} \qquad + \ldots$$
$$+ \ldots$$

ist eine symmetrische ganze Funktion von x und t (§. 2, 10), und wird entweder nach steigenden Potenzen von t geordnet

$$\begin{aligned} &a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 \\ &+ a_n x^{n-2} + a_{n-1} x^{n-3} + \ldots + a_1 x + a_2 t \\ &+ a_n x^{n-3} + a_{n-1} x^{n-4} + \ldots + a_1 x + a_3 t^2 + \ldots \end{aligned}$$

oder nach fallenden Potenzen von x

$$b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0,$$

wobei die successive Berechnung der Coefficienten

$$b_{n-1} = a_n$$
$$b_{n-2} = a_{n-1} + b_{n-1} t$$
$$b_{n-3} = a_{n-2} + b_{n-2} t$$

u. s. w. am bequemsten ist. Aus der Identität

$$f(x) = b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + x - t + f(t)$$

erkennt man bei $x = t$, daß $f(t) = a_0 + b_0 t$.

Beispiele. Wenn $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, so hat man

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} = a(x^3 + x^2 t + x t^2 + t^3) + b(x^2 + xt + t^2)$$
$$+ c(x + t) + d$$
$$= ax^3 + bx^2 + cx + d + (ax^2 + bx + c)t$$
$$+ (ax + b)t^2 + at^3$$

Wenn $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 16$, so ist $f(x) - f(t)$ durch $x - t$ teilbar. Der Quotient wird, weil

$b_5 = 6$, $b_4 = -19 + 6 \cdot 4$ u. s. w., nach folgendem Schema berechnet:

6	−19	13	−20	48	0	−16
	24	20	132	448	1984	7936
6	5	33	112	496	1984	7920

$$\frac{f(x)-f(4)}{x-4} = 6x^5 + 5x^4 + 33x^3 + 112x^2 + 496x + 1984$$

Zugleich findet man $f(4) = -16 + 1984 \cdot 4$, und demnach

$$\frac{f(x)}{x-4} = 6x^5 + 5x^4 + 33x^3 + 112x^2 + 496x + 1984 + \frac{7920}{x-4}$$

2. Um die ganze Funktion $f(x)$ in der Nähe des Wertes $f(t)$ auszudrücken d. h. nach steigenden Potenzen von $x - t$ zu entwickeln, kann man $x = t + y$ setzen und die Glieder der Potenzen dieses Binomium (§. 23) ordnen. In jedem gegebenen Falle ist es einfacher, nach dem gezeigten Verfahren die Reihe der Quotienten

$$\frac{f(x)-f(t)}{x-t} = f_1(x) \qquad \frac{f_1(x)-f_1(t)}{x-t} = f_2(x)$$

u. s. w. zu berechnen, wodurch man erhält

$$f(x) = f(t) + (x-t)f_1(x), \quad f_1(x) = f_1(t) + (x-t)f_2(x)$$

u. s. w., also

$$f(x) = f(t) + (x-t)f_1(t) + (x-t)^2 f_2(x), \text{ u. s. w.}$$

Beispiel. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 3x + 12$ wird nach steigenden Potenzen von $x - 2$ entwickelt wie folgt

1	−2	5	−3	12		
	2	0	10	14		
1	0	5	7	26	$= f(2)$	$x^3 + 5x + 7 = f_1(x)$
	2	4	18			
1	2	9	25	$= f_1(2)$		$x^2 + 2x + 9 = f_2(x)$
	2	8				
1	4	17	$= f_2(2)$			$x + 4 = f_3(x)$
	2					
1	6	$= f_3(2)$				

$$f(x) = 26 + 25(x-2) + 17(x-2)^2 + 6(x-2)^3 + (x-2)^4$$

Anmerkung. Diese Entwickelung giebt zu erkennen, ob $f(x) - f(t)$ durch eine Potenz von $x - t$ teilbar ist. Wenn $f_1(t) = 0$ ist, so ist $f(x) - f(t)$ durch $(x-t)^2$ teilbar. Wenn $f_1(t)$, $f_2(t)$ null sind, so ist $f(x) - f(t)$ durch $(x-t)^3$ teilbar. U. s. w.

Indem man $f(x) = x^5 + 8x^4 + 21x^3 + 14x^2 - 20x - 24$ nach steigenden Potenzen von $x + 2$ entwickelt,

1	8	21	14	−20	−24
	−2	−12	−18	8	24
1	6	9	− 4	−12	0
	−2	− 8	− 2	12	
1	4	1	− 6	0	
	−2	− 4	6		
1	2	− 3	0		

erkennt man, daß $f(x) = (x + 2)^3(x^2 + 2x - 3)$.

3. I. Wenn die Funktion $n$ten Grades

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + .. + a_1 x + a_0$$

bei $x = \alpha$ null ist, so ist sie bei beliebigen x durch eine Potenz von $x - \alpha$ teilbar (2). Wenn diese Potenz die λte ist, mithin $f(x)$ durch das Produkt von $(x - \alpha)^\lambda$ und einer ganzen Funktion $g(x)$ darstellbar ist, so sagt man von $f(x)$, daß sie bei $x = \alpha$ λmal null ist, und α heißt eine λfache Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$.

Wenn ferner bei $x = \beta$ $f(x)$ μmal null ist, so ist, weil $x - \alpha$ nicht null, $g(x)$ μmal null, mithin durch $(x - \beta)^\mu$ teilbar. Also ist $f(x)$ durch das Produkt $(x - \alpha)^\lambda(x - \beta)^\mu$ mit einer ganzen Funktion $h(x)$ darstellbar. U. s. w.

Wenn insbesondere die Coefficienten a_n, a_{n-1}, .. real sind, α und α' konjugiert komplex, und $f(\alpha) = 0$, so ist auch die konjugierte Zahl $f(\alpha') = 0$. Daher ist das Produkt $(x - \alpha)(x - \alpha')$, die Norm von $x - \alpha$ (Allg. Arithm. §. 16, 10), ein realer Divisor 2ten Grades von $f(x)$.

Wenn $f(x)$ teilbar ist durch $(x - \alpha)^\lambda(x - \beta)^\mu$, so ist sie nicht teilbar durch $(x - \alpha)^p(x - \alpha)^q$, wo $p < \lambda$. Wäre $(x - \alpha)^p(x - \beta)^q = (x - \alpha)^\lambda(x - \beta)^\mu$ bei allen x, so wäre $(x - \beta)^q = (x - \alpha)^{\lambda - p}(x - \beta)^\mu$, was bei $x = \alpha$ nicht zutrifft.

Wenn die Funktion $n$ten Grades bei n gegebenen Werten der Variablen null ist, λmal bei $x = \alpha$, μmal bei $x = \beta$, .., so ist sie durch das Produkt der n Faktoren $x - \alpha$, $x - \beta$, .. (nicht durch andere) teilbar. Als Quotienten der Division findet man den höchsten Coefficienten a_n der Funktion. Vergl. §. 6, 4.

II. Die Funktion $n$ten Grades kann einen beliebig auf der Zahlenebene gegebenen Wert c bei nicht mehr als n Werten der Variablen

annehmen. Wenn $f(x) - c$ null ist, λmal bei $x = \alpha$, μmal bei $x = \beta$, .., wo $\lambda + \mu + .. = n$, so ist

$$f(x) - c = a_n(x - \alpha)^\lambda (x - \beta)^\mu ..$$

Folglich ist $f(x) - c$ nicht null, wenn x von α, β, .. verschieden ist.

Demnach hat eine Gleichung $n$ten Grades nicht mehr als n Wurzeln. Daß sie soviel Wurzeln hat, war schwieriger zu erkennen. S. unten (15).

Wenn die Funktion $n$ten Grades bei mehr als n gegebenen Werten der Variablen null ist, so sind ihre Coefficienten null, die Funktion ist identisch null d. h. bei beliebigen x*). Denn unter den Faktoren des Produkts $a_n(x - \alpha)^\lambda (x - \beta)^\mu ..$ sind nach der Voraussetzung nicht null der zweite und die folgenden; also ist $a_n = 0$ die notwendige Bedingung, unter der die Funktion bei einem von α, β, .. verschiedenen Wert der Variablen null ist. Nun ist die Funktion $(n-1)$ten Grades $a_{n-1}x^{n-1} + ..$ bei mehr als $n - 1$ gegebenen Werten der Variablen null, also ist $a_{n-1} = 0$. U. s. w.

III. Eine Funktion $n$ten Grades von x wird durch $n + 1$ ihrer Werte $y_0, y_1, .., y_n$ entsprechend den Werten der Variablen $x_0, x_1, .., x_n$ eindeutig bestimmt. Newton Princ. III lemma 5 (nach prop. 40) hat

$$y = y_0 + A_0(x - x_0) + A_1(x - x_0)(x - x_1) + A_2(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + ..$$

gesetzt, und die Coefficienten A_0, A_1, .. berechnet aus dem System

$$y_1 = y_0 + A_0(x_1 - x_0)$$
$$y_2 = y_0 + A_0(x_2 - x_0) + A_1(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

u. s. w. Die Differenzen

$$y_2 - y_1 = A_0(x_2 - x_1) + A_1(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = B_0(x_2 - x_1)$$

u. s. w. ergeben das System

$$y_1 - y_0 = A_0(x_1 - x_0)$$
$$y_2 - y_1 = B_0(x_2 - x_1),\quad B_0 - A_0 = A_1(x_2 - x_0)$$
$$y_3 - y_2 = C_0(x_3 - x_2),\quad C_0 - B_0 = B_1(x_3 - x_1),\quad B_1 - A_1 = A_2(x_3 - x_0)$$

u. s. w.

Dasselbe leistet unmittelbar Lagranges Interpolationsformel 1795 (J. de l'éc. polyt. Cah. 7—8 p. 417)

---

*) Cauchy Anal. algébr. c. IV, 1. Eine Anwendung dieses Satzes ist Allg. Arithm. §. 32, 2 gegeben worden.

$$y = y_0 \frac{(x - x_1) \,..\, (x - x_n)}{(x_0 - x_1) \,..\, (x_0 - x_n)} + \,..\, + y_n \frac{(x - x_0) \,..\, (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0) \,..\, (x_n - x_{n-1})}$$

Der mit y_k multiplicierte Bruch hat den Zähler $(x - x_0) \,..\, (x - x_n)$ mit Weglaſſung von $x - x_k$, und den Nenner $(x_k - x_0) \,..\, (x_k - x_n)$ mit Weglaſſung von $x_k - x_k$. Alſo iſt y eine Funktion $n$ten Grades von x, und bei $x = x_k$ ſind alle Glieder von y null, mit Ausnahme eines Gliedes, welches den Wert y_k hat.

Und wenn zwei Funktionen $n$ten Grades von x

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \,..\, \text{ und } b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \,..$$

bei $n + 1$ Werten x übereinſtimmen, ſo ſind ſie kongruent. Denn die Funktion $n$ten Grades $(a_n - b_n) x^n + (a_{n-1} - b_{n-1}) x^{n-1} + \,..$ iſt bei denſelben Werten null, alſo ſind $a_n - b_n$, $a_{n-1} - b_{n-1} \,..$ null, d. h. $b_n = a_n$, u. ſ. w.

4. Aus der Identität (3)

$$f(x) = a_n (x - \alpha_1) \,..\, (x - \alpha_n) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \,..$$

erkennt man, daß die Gleichung $f(x) = 0$ die Wurzeln $\alpha_1, \,..\, , \alpha_n$ hat, und daß 1 und die Summen der Produkte von je 1, 2, 3, .. unter den mit -1 multiplicierten Wurzeln zu einander der Reihe nach ſich verhalten wie die Coefficienten $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \,..$*).

Beweis. Das Produkt $(x - \alpha_1) \,..\, (x - \alpha_n)$ giebt

$$x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \,..\, + C_n$$

wenn durch C_k die Summe der Produkte von je k unter den Größen $-\alpha_1, -\alpha_2, \,..$ bezeichnet wird (Allg. Arithm. §. 27, 1). Alſo hat man $a_n C_k = a_{n-k}$ in Folge der Identität (§. 4, 1), mithin

$$1 : C_1 : C_2 : \,.. = a_n : a_{n-1} : a_{n-2} : \,..$$

Beiſpiel. Bezeichnet man eine eigentliche $n$te Wurzel von 1 durch ϱ, ſo ſind $\varrho^2, \varrho^3, \,.., \varrho^n$ die übrigen $n$ten Wurzeln von 1 (Allg. Arithm. §. 18, 9). Daher hat man

$$x^n - 1 = (x - \varrho)(x - \varrho^2) \,..\, (x - \varrho^n)$$

$$\varrho + \varrho^2 + \,..\, + \varrho^n = 0, \quad (-1)^n \varrho \varrho^2 \,..\, \varrho^n = -1$$

Die Summe der $n$ten Wurzeln von 1 iſt 0, ihr Produkt $(-1)^{n-1}$.

Die durch die Coefficienten $a_n, a_{n-1}, \,..$ rational ausdrückbaren Größen $C_1, C_2, \,..$ ſind ſymmetriſche Funktionen der Größen $-\alpha_1, -\alpha_2, \,..$ (§. 2, 10). Man hat bemerkt, daß jede ſymmetriſche ganze Funktion derſelben Größen durch jene Coefficienten

*) Dieſer Satz iſt in den einfachſten Fällen von Cardano, umfaſſender von Vieta am Ende der Schrift de emendatione aequationum angemerkt worden.

rational ausgedrückt werden kann; insbesondere wurde die Summe ihrer $k$ten Potenzen rekursiv angegeben von Newton Arith. univ. p. 192 ed. Lugd. Vergl. Euler Opusc. var. arg. II p. 108. Mém. de Berlin 1748 p. 234, und anderwärts. Einzelne indepentente Ausdrücke für die Summe der 2ten, 3ten, 4ten Potenzen kommen früher vor bei Girard 1629 (Klügel math. W. I p. 56).

5. Die Funktion $x^n - 1$ ist null bei $x = e^{i\frac{m\pi}{n}}$ (Allg. Arithm. §. 31, 13), wenn m eine gerade Zahl ist. Dieser Wert ist $n$deutig, also hat die gegebene Funktion n verschiedene Divisoren ersten Grades (3), die aus $x - e^{i\frac{m\pi}{n}}$ entspringen, wenn man $m = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots$ setzt. Nun ist

$$\left(x - e^{i\frac{m\pi}{n}}\right)\left(x - e^{-i\frac{m\pi}{n}}\right) = x^2 - 2x\cos\frac{m\pi}{n} + 1$$

folglich hat die gegebene Funktion Divisoren zweiten Grades, die aus $x^2 - 2x\cos\frac{m\pi}{n} + 1$ entspringen, wenn man $m = 2, 4, 6, \ldots$ setzt. Zu diesen Divisoren kommt der Divisor ersten Grades $x - 1 (m = 0)$, und bei geradem n der Divisor ersten Grades $x + 1 (m = n)$.

Die Funktion $x^n + 1$ verschwindet bei $x = e^{i\frac{m\pi}{n}}$, wenn m eine ungerade Zahl ist. Ihre Divisoren zweiten Grades entspringen aus $x^2 - 2x\cos\frac{m\pi}{n} + 1$, wenn man $m = 1, 3, 5, \ldots$ setzt. Zu diesen kommt bei ungeradem n der Divisor $x + 1 (m = n)$.

Die Funktion $x^{2n} - 2x^n\cos\alpha + 1$ hat die Divisoren $x^n - e^{i\alpha}$ und $x^n - e^{-i\alpha}$. Nun ist $x^n - e^{i\alpha}$ durch $x - e^{i\frac{\alpha+m\pi}{n}}$ teilbar, und $x^n - e^{-i\alpha}$ durch $x - e^{-i\frac{\alpha+m\pi}{n}}$ teilbar, wenn m eine gerade Zahl bedeutet. Die n verschiedenen Divisoren zweiten Grades der gegebenen Funktion entspringen aus $x^2 - 2x\cos\frac{\alpha + m\pi}{n} + 1$, wenn man $m = 0, 2, 4, \ldots$ setzt.

Die Formel $x^2 - 2x\cos\varphi + 1$ bedeutet das Quadrat der Seite eines Dreiecks, in welchem die beiden andern Seiten die Längen x und 1 haben und den Winkel einschließen, der dem Arcus φ entspricht. Daher können die quadratischen Divisoren der Funktionen

$$x^n - 1, \quad x^n + 1, \quad x^{2n} - 2x^n\cos\alpha + 1$$

durch Teilung des Kreises oder eines Kreisbogens in n gleiche Teile konstruiert werden, und sie sind in der That zuerst geometrisch vor der Einführung der Potenzen mit imaginären Exponenten dargestellt worden, die Divisoren von $x^n - 1$ und von $x^n + 1$ durch Cotes (Harmonia mensurarum p. 114, Op. posth. 1722), die Divisoren von $x^{2n} - 2x^n\cos\alpha + 1$ durch Moivre 1730 (Misc. anal. p. 22).

6. Eine irreducible gebrochne Funktion (§. 2, 7) wird unendlich, wenn ihr Nenner null wird, während eine ganze Funktion bei endlichen Werten der Variablen nur endliche Werte hat.

Wenn bei $x = \alpha$ der Nenner der gebrochnen Funktion λmal null, mithin die gebrochne Funktion λmal unendlich ist, so kann man von ihr einen bestimmten echtgebrochnen Partialbruch ablösen, dessen Nenner $(x - \alpha)^\lambda$ und dessen Zähler entweder von x unabhängig oder eine ganze Funktion von x ist, deren Grad den λten Grad nicht erreicht. Zu diesem Zweck entwickelt man (2) nach steigenden Potenzen von $x - \alpha$ den Zähler und den Nenner, und durch Division die ersten λ Glieder des Quotienten, welche den gesuchten Partialbruch bilden. Übrig bleibt der Bruch, dessen Zähler der Rest, dessen Nenner der Divisor ist, und den man aufstellt, wenn die gegebene gebrochne Funktion in nicht mehr als 2 Partialbrüche zerlegt werden kann oder soll. Wenn der Rest nicht in Betracht kommt, so genügen die Entwickelungen bis zur $(\lambda - 1)$ten Potenz. Z. B. die gebrochne Funktion

$$\frac{2x + 1}{(x + 2)^3(x + 1)x^2}$$

wird unendlich 3mal bei $x = -2$, 1mal bei $x = -1$, 2mal bei $x = 0$, und besteht deshalb aus 3 Partialbrüchen der Nenner $(x+2)^3$, $x+1$, x^2, ohne eine hinzutretende ganze Funktion, weil die gegebene Funktion echtgebrochen ist.

Die Entwickelungen nach steigenden Potenzen von $x + 2 = y$ geben

$$\frac{-3 + 2y}{y^3(-4 + 8y - 5y^2 \ldots)} = \frac{\frac{3}{4} + y + \frac{17}{16}y^2}{y^3} + \ldots$$

also den Partialbruch

$$\frac{\frac{17}{16}x^2 + \frac{21}{4}x + 7}{(x + 2)^3}$$

Von den Entwickelungen nach steigenden Potenzen von $x + 1 = y$ werden nur die ersten Glieder $(y = 0)$ gebraucht. Der Partialbruch des Nenners $x + 1$ hat den Zähler

$$\frac{2x + 1}{(x + 2)^3x^2} \text{ bei } x + 1 = 0, \text{ d. i. } -1.$$

Die Entwickelungen nach steigenden Potenzen von x geben

$$\frac{1 + 2x}{x^2(8 + 20x \ldots)} = \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{16}x}{x^2} + \ldots$$

also den Partialbruch

$$\frac{-\frac{1}{16}x+\frac{1}{8}}{x^2}$$

Partialbrüche anderer Nenner kann die gegebene gebrochne Funktion nicht enthalten, also hat man identisch

$$\frac{2x+1}{(x+2)^3(x+1)x^2}=\frac{\frac{17}{16}x^2+\frac{21}{4}x+7}{(x+2)^3}+\frac{-1}{x+1}+\frac{-\frac{1}{16}x+\frac{1}{8}}{x^2}$$

Die Zerlegung einer gebrochnen Funktion in Partialbrüche liegt der Zerlegung der Integrale rationaler Differentiale zu Grunde, welche Leibniz und Joh. Bernoulli gefunden haben (Acta Erud. 1702—3). Die Zähler der Partialbrüche werden linear bestimmt durch die Bedingungen, unter denen

$$\frac{a_2x^2+a_1x+a_0}{(x+2)^3}+\frac{b_0}{x+1}+\frac{c_1x+c_0}{x^2}-\frac{2x+1}{(x+2)^3(x+1)x^2}=0$$

eine Identität ist d. h. gültig bei beliebigen x (§. 4, 1). Dieses der analytischen Methode entsprechende und von Euler Introd. I §. 39 angewandte Verfahren, welches auch bei andern berechtigten Entwickelungen Hilfe leistet und von Descartes bei dem Problem der Normalen (Géom. II) gebraucht worden war, hat den Namen „Methode der unbestimmten Coefficienten" erhalten. Allgemeine Formeln für die Zähler der Partialbrüche wurden durch Differentialrechnung gefunden von Euler 1755 Calc. diff. II §. 403 und Jacobi 1835 de fract. simpl. p. 9. Vergl. Euler Acta Petrop. 1780 I p. 32 und die Bemerkungen von Berlin und Hill Crelle J. 3 p. 150.

7. Wenn die gebrochne Funktion bei einem komplexen Wert der Variablen und bei dem konjugierten unendlich wird, so hat sie zwei konjugiert komplexe Partialbrüche, deren Summe real ist und direkt berechnet werden kann. Die gebrochne Funktion

$$\frac{f(x)}{(x^2+4x+5)^3g(x)} \quad \text{d. i.} \quad \frac{f(x)}{[(x+2)^2+1]^3g(x)}$$

welche bei $x=-2\pm i$ 3mal unendlich ist, wird nach der Substitution $x+2=y$ durch

$$\frac{\varphi(y)}{(y^2+1)^3\chi(y)}$$

ausgebrückt, und der Nenner und der Zähler mit $\chi(-y)$ multipliciert (Hill a. a. O.). Die ganze Funktion $\chi(y)\chi(-y)$ enthält nur gerade Potenzen von y, weil sie bei der Vertauschung von y mit $-y$ unverändert bleibt, und wird durch $\psi(y^2)$ ausgedrückt, während die Glieder von $\varphi(y)\chi(-y)$ in $yF(y^2)+G(y^2)$ sich verteilen lassen. Daher besteht die gebrochne Funktion aus den Gliedern

$$\frac{F(y^2):\psi(y^2)}{(y^2+1)^3}y+\frac{G(y^2):\psi(y^2)}{(y^2+1)^3}$$

von denen man wie oben die Partialbrüche

$$\frac{a_5y^4 + a_3y^2 + a_1}{(y^2+1)^3}y + \frac{a_4y^4 + a_2y^2 + a_0}{(y^2+1)^3} = \frac{a_5y^5 + a_4y^4 + \ldots}{(y^2+1)^3}$$

ablösen kann.

Beispiel. $\frac{x^2+1}{(x^2+4x+5)^3(x^2+2)}$ wird $(x+2=y)$

$$\frac{y^2-4y+5}{(y^2+1)^3(y^2-4y+6)} = \frac{-4y+(y^4-5y^2+30)}{(y^2+1)^3(y^4-4y^2+36)}$$

und nach steigenden Potenzen von $y^2+1=z$ entwickelt

$$-4y\,\frac{1:(41-6z+z^2)}{z^3} + \frac{(36-7z+z^2):(41-6z+z^2)}{z^3}$$

Daher hat der Partialbruch des Nenners z^3 den Zähler

$$-4y\left(\frac{1}{41} + \frac{6}{41^2}z - \frac{5}{41^3}z^2\right) + \frac{36}{41} - \frac{71}{41^2}z - \frac{221}{41^3}z^2$$

eine Funktion 5ten Grades von x. Der Partialbruch des Nenners x^2+2 hat den Zähler

$$\frac{(x^2+1)(x^2-4x+5)^3}{(x^4-6x^2+25)^3} \text{ bei } x^2+2=0, \text{ d. i. } \frac{-20x+261}{41^3}$$

Anmerkung. Wenn die ganzen Funktionen f und g $m$ten und $n$ten Grades von x einen gemeinschaftlichen Divisor nicht haben, so kann man die echtgebrochne Funktion $\frac{h}{fg}$ auch ohne Benutzung der Wurzeln der Gleichung $fg=0$ in die Partialbrüche $\frac{q}{f}+\frac{p}{g}$ auflösen, indem man h durch $pf+qg$ ausdrückt. S. unten (20).

Man kann den Multiplikator p angeben, bei welchem $h-pf$ durch g teilbar ist.

Die independente Entwickelung der gebrochnen Funktion nach steigenden Potenzen von x findet man aus den entsprechenden Entwickelungen ihrer Partialbrüche. Euler Introd. I cap. 13.

8. I. Wenn $g(x)$ und $h(x)$ ganze Funktionen mit ganzen Coefficienten bedeuten, und wenn in der Funktion $g(x)h(x)$ alle Coefficienten durch die Primzahl p teilbar sind, so sind entweder in $g(x)$ oder in $h(x)$ alle Coefficienten durch p teilbar. Es sei

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots, \quad h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots$$

Wenn p in $b_0, b_1, \ldots, b_{i-1}$ aufgeht, aber nicht in b_i, wenn ferner p in

$c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ aufgeht, aber nicht in c_k, also auch nicht in $b_i c_k$, so ist in $g(x)h(x)$ der Coefficient von x^{i+k}

$$\ldots + b_{i-1} c_{k+1} + b_i c_k + b_{i+1} c_{k-1} + \ldots$$

durch p nicht teilbar, gegen die Voraussetzung. Also sind entweder in $g(x)$ oder in $h(x)$ alle Coefficienten durch p teilbar.

II. Wenn $G(x)$ und $H(x)$ ganze Funktionen bedeuten, in welchen die höchsten Coefficienten 1 und die übrigen Coefficienten rational sind, und wenn in der Funktion $G(x)H(x)$, deren höchster Coefficient 1 ist, die übrigen Coefficienten ganz sind, so sind in $G(x)$ und $H(x)$ die übrigen Coefficienten ganz*). Denn man kann $G(x)$ und $H(x)$, wenn in ihnen gebrochne Coefficienten vorkommen, durch den $q$ten und den $r$ten Teil ganzer Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ mit ganzen Coefficienten, also $G(x)H(x)$ durch $g(x)h(x) : qr$ ausdrücken. Diese Funktion hat nach der Voraussetzung ganze Coefficienten, d. h. jede in qr aufgehende Primzahl teilt in $g(x)h(x)$ alle Coefficienten, mithin (I) teilt sie entweder in $g(x)$ oder in $h(x)$ alle Coefficienten. Wenn man durch alle in qr aufgehenden Primzahlen successive entweder $g(x)$ oder $h(x)$ dividiert, so behält man endlich $G(x)$ und $H(x)$ mit ganzen Coefficienten.

III. Wenn die ganze Funktion $f(x)$ mit ganzen Coefficienten, deren höchster 1 ist, teilbar ist durch eine ganze Funktion mit dem höchsten Coefficienten 1, so sind in dieser die übrigen Coefficienten nicht gebrochen (II), sondern entweder ganz oder irrational. Insbesondere sind die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ entweder ganz oder irrational. In der That, wenn $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots$ ganz und r, s relative Primzahlen sind, so ist

$$\left(\frac{r}{s}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} + \ldots = \frac{1}{s^{n-1}}\left(\frac{r^n}{s} + a_{n-1} r^{n-1} + a_{n-2} r^{n-2} s + \ldots\right)$$

nicht null, weil r^n prim zu s. Vergl. den besondern Fall Allg. Arithm. §. 18, 7.

Eine ganze Funktion mit ganzen Coefficienten, deren höchster a_n ist, wird durch das Produkt von a_n^{n-1} und einer ganzen Funktion mit ganzen Coefficienten, deren höchster 1 ist, ausgedrückt (§. 7, 1).

Wenn eine ganze Funktion mit ganzen Coefficienten durch eine Funktion derselben Art nicht teilbar ist, so ist sie irreducibel. Eine Gleichung mit ganzen Coefficienten ist irreducibel, wenn keine ihrer

*) Gauß Disq. arithm. 42. Eisenstein Crelle J. 39 p. 168.

Wurzeln einer Gleichung derselben Art niedern Grades genügt. Vergl. Abel Crelle J. 4 p. 132.

9. I. Wenn die ganze Funktion $f(x)$ mit ganzen Coefficienten, deren höchster 1 ist, den gleichgearteten Divisor ersten Grades $x + a$ hat, so sind

$$.., \quad f(-1), \quad f(0), \quad f(1), \quad ..$$

der Reihe nach teilbar durch

$$.., \quad -1 + a, \quad a, \quad 1 + a, \quad ..$$

Und wenn eine dieser Divisionen nicht aufgeht, so ist $x + a$ kein Divisor der gegebenen Funktion. Newtons Regel, Arithm. univ. p. 37 ed. Lugd.

Wenn $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + .. = (a + x)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ..)$ identisch ist, so hat man

$$c_0 = ab_0, \quad c_1 = ab_1 + b_0, \quad c_2 = ab_2 + b_1, \; ..$$
$$\frac{c_0}{a} = b_0, \quad \frac{c_1 - b_0}{a} = b_1, \quad \frac{c_2 - b_1}{a} = b_2, \; ..$$

und wenn eine dieser Divisionen nicht aufgeht, so ist $a + x$ kein Divisor von $c_0 + c_1 x + ...$ Bézouts Regel, Élém. d'algèbre.

Beispiel. $f(x) = x^5 - 34x^3 + 29x^2 + 212x - 300$

$$f(-1) = -450, \quad f(0) = -300, \quad f(1) = -92$$

Der Divisor $x + 3$ ist nicht ausgeschlossen, weil 3 in -300, 2 in -450, 4 in -92 aufgeht. Auch findet man

$$\frac{-300}{3} = -100, \quad \frac{212 + 100}{3} = 104, \; ..$$

Die Division durch $x + 3$ giebt (1)

1	0	−34	29	212	−300
	−3	9	75	−312	300
1	−3	−25	104	−100	0

den Quotienten $x^4 - 3x^3 - 25x^2 + 104x - 100$, bei welchem der Divisor $x - 2$ nicht ausgeschlossen ist. Die Division giebt

1	−3	−25	104	−100
	2	−2	−54	100
1	−1	−27	50	0

den Quotienten $x^3 - x^2 - 27x + 50$, der denselben Divisor hat

1	−1	−27	50
	2	2	−50
1	1	−25	0

Also ist $f(x) = (x+3)(x-2)^2(x^2+x-25)$.

II. Wenn $f(x)$ den Divisor 2ten Grades mit ganzen Coefficienten x^2+ax+b hat, so sind

$$.., \quad f(-2), \quad f(-1), \quad f(0), \quad f(1), \quad f(2), \quad ..$$

der Reihe nach durch die Glieder der arithmetischen Progression 2ter Ordnung

$$.., \quad 4-2a+b, \quad 1-a+b, \quad b, \quad 1+a+b, \quad 4+2a+b, \quad ..$$

teilbar. Man stelle je in eine Zeile die um 4 verminderten Divisoren von $f(-2)$, die um 1 verminderten Divisoren von $f(-1)$, die Divisoren von $f(0)$, die um 1 verminderten Divisoren von $f(1)$, die um 4 verminderten Divisoren von $f(2)$, u. s. w. Wenn es nicht eine arithmetische Progression erster Ordnung giebt, deren Glieder in folgenden Zeilen anzutreffen sind, so hat $f(x)$ keinen Divisor 2ten Grades mit ganzen Coefficienten.

Wenn $f(x, y)$ eine homogene ganze Funktion mit ganzen Coefficienten ist, und wenn z. B. x^2+ax+b in $f(x, 1)$ aufgeht, so geht $x^2+axy+by^2$ in $f(x, y)$ auf. Wenn die homogene ganze Funktion $f(x, y, z)$ mit ganzen Coefficienten durch die Funktion derselben Art $g(x, y, z)$ teilbar ist, so sind $g(0, y, z)$, $g(x, 0, z)$, $g(x, y, 0)$ Divisoren von $f(0, y, z)$, $f(x, 0, z)$, $f(x, y, 0)$. Aus den Divisoren dieser letztern Funktionen kann man die möglichen Formen von $g(x, y, z)$ erkennen. Newton a. a. O. Clairaut Élém. d'algèbre III.

10. Wenn $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + .. + a_1 x + a_0$, so kann die Differenz $f(x+u) - f(x)$ der Funktion nach steigenden Potenzen der Differenz u der Variablen entwickelt werden (§. 2, 5). Nach dem Binomialtheorem (Allg. Arithm. §. 23) ist

$$(x-\alpha+u)^k = (x-\alpha)^k + k(x-\alpha)^{k-1}u + ..$$
$$a(x-\alpha+u)^k - a(x-\alpha)^k = ka(x-\alpha)^{k-1}u + ..$$

d. h. die Funktion $a(x-\alpha)^k$ hat die Fluxion $ka(x-\alpha)^{k-1}$.

Durch Anwendung desselben Verfahrens auf alle Glieder der gegebenen ganzen Funktion findet man die Fluxion von $f(x)$, die durch $f'(x)$ bezeichnet wird,

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + .. + 2a_2 x + a_1$$

eine Funktion $(n-1)$ten Grades, ferner die Fluxion von $f'(x)$, welche die 2te Fluxion von $f(x)$ genannt und durch $f''(x)$ bezeichnet wird,

$$f''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + \ldots + 2a_2$$

eine Funktion $(n-2)$ten Grades und durch 2 teilbar. U. s. w. Die 3te Fluxion von $f(x)$ ist $(n-3)$ten Grades und durch 3! teilbar, die $n$te ist $n!a_n$ unabhängig von x und durch $n!$ teilbar.

Wenn die Funktion $f(x)$ in der Nähe von $f(\alpha)$ durch eine Taylorsche Reihe d. h. durch eine Potenzreihe von $x-\alpha$ ausgedrückt werden kann (vergl. 2)

$$f(x) = C_0 + C_1(x-\alpha) + C_2(x-\alpha)^2 + C_3(x-\alpha)^3 + \ldots$$

so findet man auf demselben Wege

$$\begin{aligned} f'(x) &= C_1 + 2C_2(x-\alpha) + 3C_3(x-\alpha)^2 + \ldots \\ f''(x) &= 2C_2 + 2\,.\,3C_3(x-\alpha) + \ldots \\ f'''(x) &= 2\,.\,3C_3 + \ldots \end{aligned}$$

also $f(\alpha) = C_0$, $f'(\alpha) = C_1$, $f''(\alpha) = 2C_2$, $f'''(\alpha) = 2\,.\,3C_3$, u. s. w. folglich die Ausdrücke der Entwickelungscoefficienten*)

$$C_0 = f(\alpha), \quad C_1 = f'(\alpha), \quad C_2 = \frac{f''(\alpha)}{2}, \quad C_3 = \frac{f'''(\alpha)}{3!}, \ldots$$

11. I. Wenn bei $x = \alpha$ die ganze Funktion $f(x)$ und ihre Fluxionen bis zur $(\lambda-1)$ten null sind, während die λte nicht null ist, so sind bei beliebigen x die Funktion und ihre Fluxionen bis zur $(\lambda-1)$ten durch Potenzen von $x-\alpha$ teilbar, die Funktion durch die λte Potenz, die 1te Fluxion durch die $(\lambda-1)$te, die 2te durch die $(\lambda-2)$te, .., die $(\lambda-1)$te durch die 1te, d. h. bei $x = \alpha$ ist die Funktion λmal null, die 1te Fluxion $(\lambda-1)$mal, u. s. w. so daß α eine λfache Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ ist, eine $(\lambda-1)$fache von $f'(x) = 0$, u. s. w.**). Dies folgt unmittelbar aus der Taylorschen Reihe, durch welche $f(x)$ ausgedrückt wird. Ebenso ergiebt sich (10) aus der Voraussetzung $f(x) = (x-\alpha)^\lambda \varphi(x)$

$$f(x+u) - f(x) = [(x-\alpha+u)^\lambda - (x-\alpha)^\lambda]\varphi(x+u) + (x-\alpha)^\lambda[\varphi(x+u) - \varphi(x)]$$

$$f'(x) = \lambda(x-\alpha)^{\lambda-1}\varphi(x) + (x-\alpha)^\lambda \varphi'(x)$$

---

*) Taylor Meth. incrementorum 1715 prop. 7. Vergl. Stirling Lineae 3^i ordinis 1717 prop. 3 und Maclaurin Fluxions 1742 art. 751, welche beide auf Taylor Bezug nehmen.

**) Kennzeichen der mehrfachen Wurzeln einer Gleichung waren vor der Erfindung der Differentialrechnung von Hudde 1657 gegeben worden. Epist. I, reg. 10 in Schootens neuer Ausgabe von Descartes' Geometrie, 1659. Vergl Euler Calc. diff. II c. 9.

mithin die Teilbarkeit von $f'(x)$ durch $(x-\alpha)^{\lambda-1}$ und die Zerlegung in Partialbrüche

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\lambda}{x-\alpha} + \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

II. Wenn bei den Werten $\alpha, \beta, \ldots$ der Variablen die ganze Funktion mehrmal null ist, so ist auch die erste Fluxion null, also sind $f(x)$ und $f'(x)$ beide teilbar durch eine ganze Funktion von x mit Coefficienten, die im allgemeinen irrational sind. Der größte gemeinschaftliche Divisor, welcher die ganze Funktion $f(x)$ mit rationalen Coefficienten und ihre Fluxion $f'(x)$ teilt, ist eine ganze Funktion $g(x)$ mit rationalen Coefficienten (§. 2, 7). Wenn nun bei $x = \alpha, \beta, \ldots$ die $f(x)$ λmal, μmal, .. null ist, so ist $g(x)$ wie $f'(x)$ zugleich $(\lambda-1)$mal, $(\mu-1)$mal, .. null. Daher ist $f(x) : g(x) = p$ diejenige ganze Funktion mit rationalen Coefficienten, welche, wenn $f(x)$ 1mal oder mehrmal null ist, je 1mal null ist. Alle Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sind 1fache Wurzeln der Gleichung $p = 0$.

Wenn ferner $h(x)$ der größte gemeinschaftliche Divisor von $g(x)$ und $g'(x)$ ist, so ist $g(x) : h(x) = q$ diejenige ganze Funktion mit rationalen Coefficienten, welche, wenn $f(x)$ 2mal oder mehrmal null ist, je 1mal null ist. Alle 2fachen und mehrfachen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sind 1fache Wurzeln der Gleichung $q = 0$. Indem man $h(x)$ durch den größten gemeinschaftlichen Divisor von h und h' dividiert, findet man die ganze Funktion r mit rationalen Coefficienten, welche, wenn $f(x)$ 3mal oder mehrmal null ist, je 1mal null ist. Alle 3fachen und mehrfachen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sind 1fache Wurzeln der Gleichung $r = 0$. U. s. w.

Nun ist p teilbar durch q, weil alle Wurzeln der Gleichung $q = 0$ Wurzeln der Gleichung $p = 0$ sind; $p : q$ ist je 1mal null, wenn $f(x)$ 1mal null ist. Ebenso ist q durch r teilbar, und $q : r$ je 1mal null, wenn $f(x)$ 2mal null ist. U. s. w. Folglich findet man

$$f(x) = \frac{p}{q}\left(\frac{q}{r}\right)^2 \ldots$$

III. Daher ist eine ganze Funktion, welche bei einem Werte der Variablen mehrmal null ist, reducibel. Wenn die ganze Funktion $f(x)$ und ihre Fluxion $f'(x)$ nicht beide durch eine ganze Funktion teilbar sind, so sind alle Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ von einander verschieden.

12. Wenn die Variable im realen Gebiet von x an steigt, so beginnt die ganze Funktion $f(x)$ zu steigen oder zu fallen, je nachdem

ihre Fluxion $f'(x)$ positiv oder negativ ist. Wenn $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Zeichen haben, und $f'(x)$ das Zeichen nicht wechselt, während x den realen Weg von a bis b zurücklegt, so liegt auf diesem Weg ein und nicht mehr als ein Wert der Variablen, bei dem die Funktion null ist (§. 2, 5).

Wenn bei $x = \alpha$ die ganze Funktion f und alle ihre Fluxionen positiv sind, so findet bei größern x dasselbe statt, und α ist eine obere Grenze der realen Wurzeln der Gleichung $f = 0$ (Newton Arithm. univ. p. 194 ed. Lugd.). Z. B.

f	$x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120$
f'	$5x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 60x + 63$
$\frac{1}{2}f''$	$10x^3 - 12x^2 - 30x + 30$
$\frac{1}{6}f^{(3)}$	$10x^2 - 8x - 10$
$\frac{1}{24}f^{(4)}$	$5x - 2$

Bei $x = 1$ ist die letzte dieser Funktionen positiv, aber nicht die vorhergehende. Bei $x = 2$ sind auch die vorhergehenden positiv und beginnen zu steigen, während x von 2 an steigt; mithin hat die Gleichung $f = 0$ über der Grenze 2 keine reale Wurzel.

Wenn $(-1)^5 f(-y)$ positiv ist bei allen $y > \alpha$, so kann nicht f das Zeichen wechseln bei $x = -y < -\alpha$. Von den Funktionen

$$\begin{array}{rrrrr} y^5 & + & 2y^4 & - 10y^3 & - 30y^2 + 63y + 120 \\ 5y^4 & + & 8y^3 & - 30y^2 & - 60y + 63 \\ 10y^3 & + & 12y^2 & - 30y & - 30 \\ 10y^2 & + & 8y & - 10 & \\ 5y & + & 2 & & \end{array}$$

sind bei $y = 1$ die 2 letzten, bei $y = 2$ die 3 letzten, bei $y = 3$ alle positiv; also ist -3 eine untere Grenze für die realen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$.

Und wenn $y^5 f(1 : y)$ positiv ist bei allen $y > \alpha$, so kann nicht f das Zeichen wechseln bei $x = 1 : y < 1 : \alpha$.

13. Bei einer gegebenen Reihe von realen Zahlen bestimme man die Zeichen der Quotienten jeder folgenden Zahl durch die nächst vorhergehende. Wenn unter diesen Quotienten v negative sich befinden, so sagt man, die gegebene Reihe hat v Wechsel (variations). Der ganzen Funktion $f(x)$ schreibt man ebensoviel Wechsel zu, als die Reihe ihrer Coefficienten hat.

I. Wenn α positiv ist, und wenn $(x - \alpha)f(x)$, $f(x)$, $(x + \alpha)f(x)$ der Reihe nach u, v, w Wechsel haben, so ist $u - v$ eine positive ungerade Zahl, $v - w$ null oder eine positive gerade Zahl.

Beweis. In $f(x) = a_n x^n + \ldots$ trete der erste Wechsel bei dem Coefficienten a_p ein, der zweite bei a_q, der letzte bei a_t, wobei $p, q, \ldots$ eine fallende Reihe bilden. Dann haben in $(x - \alpha) f(x)$ die Coefficienten von x^{p+1}, x^{q+1}, x^{t+1} der Reihe nach einerlei Zeichen mit a_p, a_q, a_t. Also findet man in $(x - \alpha) f(x)$ bis zu dem Coefficienten von x^{p+1} wenigstens 1 Wechsel, bis zu dem Coefficienten von x^{q+1} wenigstens 2 und bis zu dem Coefficienten von x^{t+1} wenigstens soviel Wechsel als $f(x)$ hat. Nach der Voraussetzung ist a_0 mit a_t von einerlei Zeichen, folglich giebt es in $(x - \alpha) f(x)$ bis zu dem Schlußglied $-\alpha a_0$ wenigstens einen Wechsel mehr, als deren $f(x)$ hat.

Dagegen findet man in $(x + \alpha) f(x)$ bis zu dem Coefficienten von x^{p+1} höchstens 1 Wechsel, bis zu dem Coefficienten von x^{q+1} höchstens 2 und bis zu dem Coefficienten von x^{t+1} höchstens soviel Wechsel als deren $f(x)$ hat. Und nur in dem Falle, daß bei dem Coefficienten von x^{t+1} ein Wechsel nicht stattgefunden hat, tritt bis zu dem Schlußglied noch ein Wechsel ein.

Daher sind $u - v - 1$, $v - w$ nicht negativ. Wenn a_n und a_0 einerlei Zeichen haben, so sind v und w gerade, u ungerade; wenn a_n und a_0 verschiedene Zeichen haben, so sind v und w ungerade, u gerade. Also ist immer $u - v$ ungerade, $v - w$ gerade.

II. Wenn die Gleichung $f(x) = 0$ die positiven Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ hat, so ist $f(x) = (x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_k) \varphi(x)$ und hat wenigstens k Wechsel (I). Umgekehrt:

Descartes' Regel*). Wenn es in $f(x)$ v Wechsel giebt, so kann die Gleichung $f(x) = 0$ nicht mehr als v positive Wurzeln haben. Wenn es in $f(-x)$ v' Wechsel giebt, so kann die Gleichung $f(x) = 0$ nicht mehr als v' negative Wurzeln haben (positive Wurzeln von $f(-x) = 0$). Die Gleichung $f(x) = 0$ kann nicht mehr als $v + v'$ reale Wurzeln haben.

Z. B. $f(x) = x^3 + 3x - 5$ hat 1 Wechsel, $f(-x)$ hat keinen Wechsel, also kann die Gleichung $f(x) = 0$ höchstens 1 positive und keine negative Wurzel haben. In der That ist die Discriminante der Gleichung $(-\frac{5}{2})^2 + 1^3 = 7\frac{1}{4}$ positiv.

*) Die Regel, deren Erfindung Harriot von Wallis, Leibniz u. a. zugeschrieben wird, welche jedoch in Harriots Nachlaß vergeblich gesucht worden ist (Klügel math. W. I p. 50 ff. II p. 435), wurde von Descartes Géom. III ungenau und unbewiesen aufgestellt. Die Berichtigung, den Zusatz und den Beweis verdankt man Gauß 1828 Crelle J. 3 p. 1. Vergl. Segner Mém. de Berlin 1756. Choquet et Mayer Algèbre 392 ff.

III. Wenn unter den Coefficienten von $f(x)$ keiner null ist, so giebt es $n - v$ Nicht-Wechsel in $f(x)$, welchen die in $f(-x)$ vorhandenen Wechsel entsprechen; daher ist $v + v' = n$.

Wenn $2k$ folgende Coefficienten in $f(x)$ null sind, so enthält von den an der Lücke stehenden Gliedern das eine eine gerade Potenz von x, das andere eine ungerade Potenz, also giebt dieses Paar entweder in $f(x)$ oder in $f(-x)$ einen Wechsel. Anstatt dieses einen Wechsels erhält man in $f(x)$ und in $f(-x)$ zusammen $2k + 1$ Wechsel, wenn man die Lücke durch $2k$ Glieder mit willkürlichen Coefficienten ausfüllt. Demnach wird die Zahl $v + v'$ durch $2k$ zu n ergänzt, und man hat $v + v' = n - 2k$.

Wenn $2k + 1$ folgende Coefficienten in $f(x)$ null sind, so enthalten die an der Lücke stehenden Glieder Potenzen von x, die beide gerade oder beide ungerade sind, also giebt dieses Paar entweder sowohl in $f(x)$ als auch in $f(-x)$, oder in keiner von beiden einen Wechsel. Dafür erhält man in $f(x)$ und in $f(-x)$ zusammen $2k + 2$ Wechsel, wenn man die Lücke durch $2k + 1$ Glieder mit willkürlichen Coefficienten ausfüllt. Also wird die Zahl $v + v'$ durch $2k$ oder durch $2k + 2$ zu n ergänzt, je nachdem die an der Lücke stehenden Glieder verschiedene oder gleiche Zeichen besitzen, und man hat $v + v' = n - 2k$ in dem ersten Falle, $v + v' = n - 2k - 2$ in dem andern Falle.

14. Von der ganzen Funktion u der Variablen x und ihrer Fluxion u_1 ausgehend bilde man durch successive Divisionen die endliche Kette (§. 2, 7)

$$\begin{array}{llll} u = u_1 p_1 + u_2 & \text{oder} & v = v_1 q_1 - v_2 \\ u_1 = u_2 p_2 + u_3 & & v_1 = v_2 q_2 - v_3 \\ u_2 = u_3 p_3 + u_4 & & v_2 = v_3 q_3 - v_4 \\ \quad . \quad . \quad . \quad . & & \quad . \quad . \quad . \quad . \end{array}$$

und zwar die letztere, indem man

$$\begin{array}{cccccccccc} u & u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 & u_5 & -u_6 & -u_7 & \cdot\cdot \\ & p_1 & -p_2 & p_3 & -p_4 & p_5 & -p_6 & p_7 & \cdot\cdot \end{array}$$

der Reihe nach durch

$$\begin{array}{ccccc} v & v_1 & v_2 & v_3 & \cdot\cdot \\ & q_1 & q_2 & q_3 & \cdot\cdot \end{array}$$

bezeichnet. Die Reihe der Funktionen v, v_1, v_2, .., v_r heißt eine Sturmsche Reihe, z. B.

$$x^3 - 2x - 4, \quad 3x^2 - 2, \quad x + 3, \quad -25$$

Wenn das Schlußglied v_r von x unabhängig ist, so haben v und v_1 keinen

von x abhängigen gemeinschaftlichen Divisor. Wenn v_r in v_{r-1} aufgeht, so ist v_r der größte gemeinschaftliche Divisor von v und v_1. Bei einem gegebenen realen x hat die Sturmsche Reihe eine bestimmte Menge Wechsel (13), welche von x abhängt, aber nur dann sich ändert, wenn x einen Wert überschreitet, bei dem das Anfangsglied der Reihe v null ist.

I. Wenn x den Wert δ durchläuft, bei welchem das Anfangsglied v nicht null und ein Mittelglied v_i null ist, so bleibt in der Sturmschen Reihe die Menge der Wechsel unverändert.

Beweis. Unter der Bedingung $v_i(\delta) = 0$ ist zufolge der Kette $v_{i-1}(\delta) = -v_{i+1}(\delta)$ nicht null, sonst wäre auch $v(\delta) = 0$, gegen die Voraussetzung. Nach §. 2, 4 hat $\varphi(\delta + h)$ bei hinreichend kleinem h dasselbe Zeichen wie $\varphi(\delta)$. Sowohl bei $x = \delta - h$ als auch bei $x = \delta + h$ haben daher v_{i-1} und v_{i+1} verschiedene Zeichen, und in beiden Fällen hat die Sturmsche Reihe dieselbe Menge Wechsel.

II. Wenn x steigend den Wert α überschreitet, bei welchem das Anfangsglied v null ist, so verliert die Sturmsche Reihe einen Wechsel.

Beweis. Unter der Voraussetzung $v = (x - \alpha)^2 g(x)$ ist (11)

$$\frac{v_1}{v} = \frac{\lambda}{x - \alpha} + \frac{g'(x)}{g(x)}$$

bei $x = \alpha - h$ negativ, bei $x = \alpha + h$ positiv, wenn h hinreichend klein. Daher beginnt die Sturmsche Reihe bei $x = \alpha - h$ mit einem Wechsel, bei $x = \alpha + h$ mit einem Nicht-Wechsel.

III. Wenn x steigend k Werte überschreitet, bei welchen das Anfangsglied v null ist, so verliert die Sturmsche Reihe k Wechsel. Umgekehrt:

Sturmscher Satz*). Wenn die zu einer ganzen Funktion gehörende Sturmsche Reihe bei einem gegebenen Wert der Variablen k Wechsel weniger hat als bei einem gegebenen kleinern Wert derselben, so liegen zwischen den gegebenen Grenzen k verschiedene Werte der Variablen, bei denen die Funktion (einmal oder mehrmal) null ist. Z. B. die Sturmsche Reihe

$$x^3 - 2x - 4, \quad 3x^2 - 2, \quad x + 3, \quad -25$$

*) Von Sturm 1829 der Pariser Akademie mitgeteilt. Férussac Bulletin XI p. 419. Choquet et Mayer Algèbre 427 ff. Vergl. des Verf. Determinanten 4te Aufl. p. 165.

hat bei $x = -\infty,\ 0,\ +\infty$ bezüglich 2, 2, 1 Wechsel. Also hat die Gleichung $x^3 - 2x - 4 = 0$ nicht mehr als eine reale und zwar eine positive Wurzel, nämlich 2. In der That ist ihre Discriminante $4 - \frac{8}{27}$ positiv.

15. I. Wenn $c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots$ real, c_0 nicht null, $m = 1, 2, \ldots$, so hat die Potenzreihe von z

$$u = c_0 z^m + c_1 z^{m+1} + c_2 z^{m+2} + \ldots$$

bei positiven hinreichend kleinen z das Zeichen von c_0 und eine beliebig kleine Größe. Denn

$$u = c_0 z^m\left(1 + \frac{c_1}{c_0} z + \frac{c_2}{c_0} z^2 + \ldots\right) = c_0 z^m (1 + v)$$

Die größte unter den Zahlen $\left|\frac{c_1}{c_0}\right|,\ \left|\frac{c_2}{c_0}\right|, \ldots$ wird durch c bezeichnet. Also ist

$$|v| \leqq c(z + z^2 + \ldots) < \frac{cz}{1 - z} \text{ bei } z < 1$$

$$|v| < 1 \text{ bei } cz < 1 - z, \text{ d. h. bei } z < \frac{1}{1 + c}$$

$$|v| < \delta < 1 \text{ bei } z < \frac{\delta}{\delta + c}$$

Wenn nun $z < \frac{1}{1 + c}$, so ist $1 + v$ positiv, und u hat das Zeichen von c_0. Endlich hat man

$$|u| < |c_0| z^m (1 + \delta) < \varepsilon$$

wenn nicht nur $z < \frac{\delta}{\delta + c}$, sondern auch $z < \sqrt[m]{\frac{\varepsilon}{|c_0|(1 + \delta)}}$.

II. Wenn a_n nicht null, so ist

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$$

$$= a_n x^n\left(1 + \frac{a^{n-1}}{a_n x} + \frac{a_{n-2}}{a_n x^2} + \ldots\right) = a_n x^n (1 + M)$$

Der größte der Quotienten $\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|,\ \left|\frac{a_{n-2}}{a_n}\right|, \ldots$ sei a. Also ist

$$|M| < a\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x|^2} + \ldots\right) < \frac{a}{|x| - 1} \text{ bei } |x| > 1$$

$$|M| < 1 \text{ bei } |x| > 1 + a$$

$$|M| < \delta < 1 \text{ bei } |x| > 1 + \frac{a}{\delta}$$

Bei $|x| > 1 + a$ ist $|f| = |a_n x^n||1 + M| > |a_n x^n|(1 - |M|)$ nicht null, d. h. keine Wurzel der Gleichung $f = 0$ liegt **außerhalb** des Kreises um den Nullpunkt mit dem Radius $1 + a$.

Zugleich findet man

$$|f| > |a_n x^n|(1 - \delta) > \omega$$

wenn nicht nur $|x| > 1 + \frac{a}{\delta}$, sondern auch $|x| > \sqrt[n]{\frac{\omega}{|a_n|(1-\delta)}}$.

III. Wenn a_0 nicht null, $x = 1 : y$, so ist $f = a_0(1 + N)$. Der größte der Quotienten $\left|\frac{a_1}{a_0}\right|, \left|\frac{a_2}{a_0}\right|, \ldots$ sei a'. Also ist

$$|N| < \frac{a'}{|y| - 1} \text{ bei } |y| > 1$$

Bei $|y| - 1 > a'$ d. h. bei $|x| < \frac{1}{1 + a'}$ ist $|N| < 1$, f nicht null. Also liegt keine Wurzel der Gleichung $f = 0$ **innerhalb** des Kreises um den Nullpunkt mit dem Radius $\frac{1}{1 + a'}$.

IV. Allen x des Gebietes, welches die beiden Kreise einschließen, entsprechen endliche $f(x)$ in ununterbrochner Folge, deren Absolutwerte eine untere Grenze haben. Wenn $f(x_0)$ nicht null ist, so kann ihr Absolutwert vermindert werden, d. h. es giebt ein positives h und eine bestimmte Einheitswurzel ϱ der Art, daß $|f(x_0 + \varrho h)| < |f(x_0)|$.

Durch die Substitution $x = x_0 + \varrho h$ wird

$$f(x_0 + \varrho h) = b_0 + b_k \varrho^k h^k + b_{k+1} \varrho^{k+1} h^{k+1} + \ldots = b_0 M$$

wo $b_0 = f(x_0)$, b_k der erste Coefficient, welcher nicht null ist, und

$$M = 1 + (p + iq)\varrho^k h^k + \ldots$$

Bei negativen p nimmt man nun $\varrho^k = 1$ (Allg. Arithm. §. 18, 8. II), so daß

$$M = 1 + ph^k + \ldots + i(qh^k + \ldots), \quad |M|^2 = 1 + 2ph^k + \ldots$$

Bei positiven p nimmt man $\varrho^k = -1$, so daß

$$M = 1 - ph^k + \ldots - i(qh^k + \ldots), \quad |M|^2 = 1 - 2ph^k + \ldots$$

Bei $p = 0$ und positiven q nimmt man $\varrho^k = i$, so daß

$$M = 1 - qh^k + \ldots, \quad |M|^2 = 1 - 2qh^k + \ldots$$

Bei $p = 0$ und negativen q nimmt man $\varrho^k = -i$, so daß

$$M = 1 + qh^k + \ldots, \quad |M|^2 = 1 + 2qh^k + \ldots$$

In jedem dieser Fälle ist $|M|^2 - 1$ negativ bei hinreichend kleinen positiven h (I), folglich $|M| < 1$, $|f(x_0 + \varrho h)| < |f(x_0)|$.

V. Demnach haben die in Betracht kommenden $|f(x)|$ eine untere Grenze, die nicht positiv sondern null ist. Diese Grenze ist durch kontinuierliche Veränderung von x erreichbar, weil bei solcher Veränderung $f(x)$ sich nicht sprungweise verändert, mithin $f(x) = 0$ umgeben ist von $|f(x)|$, die nicht null sind. Also ist in dem angegebenen Gebiet eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ enthalten.

Der obige Beweis für die Existenz einer Wurzel einer algebraischen Gleichung ist im wesentlichen von Argand gegeben worden. Essai sur les quantités imaginaires 1806 und Gergonne Ann. 1813 t. 4 p. 133 (2de éd. par Hoüel 1874 p. 58 und 90). Einen ähnlichen Beweis gab Legendre Théorie des nombres 1808 §. 119, der Argands Essai gekannt aber nicht angeführt hat. Bekannt wurde derselbe Beweis durch Cauchy Analyse algébr. 1821 c. 10, welcher die Legendresche Darstellung als die Grundlage seiner Bearbeitung angiebt. Vergl. Sturm 1832 in Choquet et Mayer Algèbre §. 378. Serret Alg. supér. 44. In Weierstraß' Vorlesungen ist der Beweis verschärft worden.

16. Wenn der (komplexe) Wert x der Variablen so verändert wird, daß sein Punkt M auf der Zahlenebene (Allg. Arithm. §. 16, 10. §. 31, 11) eine gegebene Linie hin und wieder durchläuft, so durchläuft der Punkt N des entsprechenden Wertes $f(x)$ einer eindeutigen Funktion die entsprechende Linie hin und wieder; und wenn M eine geschlossene Linie einmal durchlaufen hat, so ist auch die entsprechende von N zurückgelegte Linie geschlossen.

Die von einer geschlossenen Linie, welche sich selbst nicht schneidet, begrenzte Fläche wird eine Zelle genannt (Planim. §. 9, 10). Der Perimeter der Zelle wird so durchlaufen, daß die Zelle auf dem linken Ufer des Perimeters liegt; und positive Winkel werden durch linksum gehende Drehung beschrieben.

Wenn der Punkt M eine Linie hin und wieder durchläuft, ohne den ruhenden Punkt S zu berühren, oder wenn M eine geschlossene Linie durchläuft, deren Zellen den Punkt S ausschließen, so beschreibt der Schenkel SM Winkel, deren Summe null ist. Wenn aber M eine Zelle umläuft, welche den Punkt S einschließt, so beschreibt der Schenkel SM Winkel, deren Arcus die Summe 2π ergeben.

Durch $A, B, C, \ldots$ werden die Punkte der Werte $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ der Variablen bezeichnet, bei denen eine gegebene ganze Funktion λmal, μmal, νmal, .. null ist, d. h. die Punkte der λfachen Wurzel α, der μfachen Wurzel β, der νfachen Wurzel γ, .. der Gleichung $f(x) = 0$. Die entsprechenden Punkte von $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma), \ldots$ fallen mit dem Nullpunkt O zusammen.

I. Wenn der Punkt M eine Zelle umläuft, welche keinen der Punkte $A, B, C, \ldots$ enthält, so beschreibt der Vektor ON des entsprechenden Punktes N Winkel, deren Summe null ist.

Beweis. Die gegebene Zelle wird durch Binnenwege in beliebig kleine Zellen (Zellenteile) zerlegt. Ein Punkt, welcher alle einzelnen Zellenteile umläuft, umläuft die ganze Zelle und durchläuft alle Binnenwege hin und zurück. Z. B. ein Punkt, welcher die durch den Binnenweg km getrennten Zellen $klmk$ und $kmnk$ umlaufen hat, hat die Zelle $klmnk$ umlaufen und den Binnenweg km hin und zurück durchlaufen.

Wenn t einem Zellenteil angehört, welcher $\alpha, \beta, \ldots$ nach Voraussetzung nicht enthält, so ist $f(t)$ nicht null. Bei hinreichend kleiner Differenz $x - t$ ist $f(x) - f(t)$ beliebig klein (10 und 15, I). Wenn der Zellenteil hinreichend klein ist und von M umlaufen wird, so durchläuft N in beliebig kleiner Distanz von $f(t)$ eine geschlossene Linie, welche eine oder mehr Zellen umgiebt. Von diesen Zellen ist aber O ausgeschlossen, also beschreibt der Vektor ON Winkel, deren Summe null ist.

Wenn der Binnenweg, durch welchen ein Zellenteil von einem andern Zellenteil getrennt ist, von M hin und zurück durchlaufen wird, so durchläuft N hin und zurück eine Linie, auf welcher O nicht liegt; also beschreibt der Vektor ON Winkel, deren Summe null ist.

Also werden auch, während M die gegebene Zelle umläuft, von ON Winkel beschrieben, deren Summe null ist.

II. Wenn der Punkt M eine Zelle umläuft, welche den Punkt A und keinen der übrigen $B, C, \ldots$ enthält, so beschreibt ON Winkel, deren Arcus die Summe $2\pi\lambda$ ergeben.

Beweis. Von der gegebenen Zelle wird durch einen geschlossenen Binnenweg eine hinreichend kleine Zelle abgeteilt, welche den Punkt A enthält; das übrige Stück wird durch einen Binnenweg in eine Zelle verwandelt, welche keinen der Punkte $A, B, C, \ldots$ enthält. Nach der Voraussetzung ist

$$f(x) = (x - \alpha)^{\lambda} g(x), \quad \operatorname{arc} f(x) = \lambda \operatorname{arc}(x - \alpha) + \operatorname{arc} g(x)$$

(Allg. Arithm. §. 31, 11). Bei hinreichend kleinen $x - \alpha$ ist $g(x) - g(\alpha)$ beliebig klein, also mit einem beliebig kleinen Fehler

$$\operatorname{arc} f(x) = \lambda \operatorname{arc}(x - \alpha) + \operatorname{arc} g(\alpha)$$

Wenn die hinreichend kleine Zelle, in welcher A liegt, von M umlaufen wird, so wächst $\operatorname{arc}(x - a)$ um 2π, folglich $\operatorname{arc} f(x)$ um $2\pi\lambda$, d. h. der Vektor ON beschreibt Winkel, deren Arcus die Summe $2\pi\lambda$ ergeben.

Wenn M den andern Zellenteil umläuft, so beschreibt ON Winkel, deren Summe null ist (I); desgleichen, wenn M einen Binnenweg hin und wieder durchläuft. Wenn daher M beide Zellenteile nach einander umläuft, d. h. die gegebene Zelle einmal umläuft und den Binnenweg hin und wieder zurücklegt, so beschreibt ON Winkel, deren Arcus die Summe $2\pi\lambda$ ergeben.

III. Wenn die gegebene Zelle die Punkte A, B und keinen der übrigen enthält, so findet man durch 2 geschlossene Binnenwege, welche A und B umgeben, und durch 2 Binnenwege, welche die 3 Perimeter unter einander verbinden, eine Zelle, welche keinen der Punkte A, B, .. enthält. Wenn M diese 3 Zellen umlaufen hat, so hat er die gegebene Zelle umlaufen und die 4 Binnenwege hin und wieder zurückgelegt. Dabei hat ON Winkel beschrieben, deren Arcus die Summe $2\pi(\lambda + \mu)$ ergeben. U. s. w. Umgekehrt:

Cauchys Satz*). Wenn auf der Zahlenebene der Punkt M der Variablen x den Perimeter einer gegebenen Zelle einmal durchläuft, und der entsprechende Punkt N der ganzen Funktion $f(x)$, ohne den Nullpunkt O zu erreichen, sich so bewegt, daß der Schenkel ON Winkel beschreibt, deren Arcus die Summe $2\pi k$ ergeben, so enthält die Zelle k (getrennte oder vereinte) Punkte der Variablen, bei welchen die Funktion null ist, d. h. k (verschiedene oder nicht verschiedene Punkte von) Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$.

Wenn der Punkt von 1 durch E, und der Arcus des Winkels EON d. i. Arcus von $f(x) = T + iU$ durch φ bezeichnet wird, so ist $\operatorname{tang}\varphi = U : T$. Wenn φ steigend die Werte π, 2π, 3π, .. überschreitet, so geht $\operatorname{tang}\varphi$ steigend durch 0 und hört auf negativ zu sein; wenn φ fallend jene Werte überschreitet, so geht $\operatorname{tang}\varphi$ fallend durch 0 und hört auf positiv zu sein. Also kann der Schenkel ON Winkel, deren Arcus die Summe $2\pi k$ haben, nicht beschreiben, ohne daß $U : T$ mehrmal null wird, und zwar $2k$mal steigend, oder $(2k + m)$mal steigend und $m$mal fallend, also $2k$mal öfter steigend als fallend. Man kann daher auch (nach Cauchy) zählen, wievielmal öfter steigend als fallend $U : T$ null wird, während der Punkt der Variablen die gegebene Zelle umläuft, um die Menge k der in der Zelle enthaltenen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ zu bestimmen.

---

*) Cauchy hat diesen Satz 1831 der Turiner Akademie, 1837 in dem J. de l'Ecole polyt. Cah. 25 p. 176 mitgeteilt. Inzwischen hat Sturm 1836 denselben Satz einfacher bewiesen Liouv. J. 1 p. 290. Vergl. die Beweise von Sturm und Liouville Liouv. J. 1 p. 278, Moigno Liouv. J. 5 p. 75, Serret Algèbre supér. I n° 53.

IV. Gauß' Satz. Eine ganze Funktion $n$ten Grades $f(x)$ ist $n$mal null bei getrennten oder vereinten Werten x der Variablen. Die Gleichung $n$ten Grades $f(x) = 0$ hat n Wurzeln, die im allgemeinen alle, bei besonderen Coefficienten nicht alle von einander verschieden sind.

Beweis. $f(x) = a_n x^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \frac{a_{n-2}}{a_n x^2} + \ldots\right)$ ist bei hinreichend großem x durch $a_n x^n$, der Arcus von $f(x)$ durch den Arcus von $a_n x^n$ ausdrückbar mit einem beliebig kleinen Fehler. Die von ON beschriebenen Winkel betragen $n$mal soviel als die von OM beschriebenen. Wenn M einen hinreichend großen Kreis, dessen Centrum O ist, einmal durchläuft, so beschreibt ON Winkel, deren Arcus die Summe $2\pi n$ ergeben. Also enthält die Fläche des von M durchlaufenen Kreises n Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$.

Dieser Fundamentalsatz der algebraischen Analysis, welchen man früher aus besonderen Fällen erkannt hatte, ist von D'Alembert, Euler, Lagrange zu beweisen versucht worden. Mém. de Berlin 1746 p. 182, 1749 p. 223, 1772 p. 222. Den ersten Beweis nebst einer umfassenden Kritik der frühern Versuche hat Gauß gegeben: Demonstratio nova theorematis, omnem functionem etc. Helmstädt 1799. Zwei andere Beweise hat Gauß 1815 und 1816 im 3ten Bande der Göttinger Kommentationen, und eine neue Bearbeitung des zuerst erwähnten Beweises 1849 im 4ten Bande der Gött. Abhandlungen mitgeteilt (Werke Bd. 3).

17. I. Aus $f(t + iu) = T + iU$, $f(t - iu) = T - iU$ folgt

$$2T = f(t + iu) + f(t - iu),\quad 2iU = f(t + iu) - f(t - iu)$$

Hier ist T eine gerade Funktion von u, welche bei Vertauschung von u mit $-u$ unverändert bleibt. Dagegen ist U eine ungerade Funktion von u, welche bei derselben Vertauschung das Zeichen wechselt, und durch u teilbar ist. Also sind T und $U : u$ ganze Funktionen von u^2 und t.

Wenn u^2, t Zahlen sind, welche dem System ($T = 0$, $U : u = 0$) genügen, so ist $t + iu$ eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$. Diese Wurzel bedarf keiner weitern Entwickelung, wenn u^2 positiv und t real. Man kann sich derselben durch eine der Newtonschen (§. 8, 5) analoge Methode annähern. Serret Alg. sup. 168.

II. Ein Kreis, außerhalb dessen Punkte von Wurzeln einer gegebenen Gleichung nicht liegen (vergl. 15. II), ist von Gauß 1849 angezeigt worden. Wenn

$$f(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots$$

wenn von x, A, B, .. die Moduln durch r, a, b, .. und die Arcus durch ϱ, α, β, .. bezeichnet werden, so ist

$$\begin{matrix} T \\ U \end{matrix} = r^n \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} n\varrho + ar^{n-1} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \varrho_1 + br^{n-2} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \varrho_2 + ..$$
$$\varrho_1 = \alpha + (n-1)\varrho, \quad \varrho_2 = \beta + (n-2)\varrho, ..$$

Weil $\cos^2 n\varrho + \sin^2 n\varrho = 1$, so beträgt unter den Werten $\cos n\varrho$, $-\cos n\varrho$, $\sin n\varrho$, $-\sin n\varrho$ einer nicht weniger als $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Wenn nun $\cos n\varrho \geq \sqrt{\frac{1}{2}}$, so hat in T d. i.

$$\begin{matrix} r^n(\cos n\varrho - \sqrt{\tfrac{1}{2}}) + ar^{n-1}(1 + \cos\varrho_1) + br^{n-2}(1 + \cos\varrho_2) + .. \\ + r^n\sqrt{\tfrac{1}{2}} \qquad\qquad - ar^{n-1} \qquad\qquad - br^{n-2} \quad - .. \end{matrix}$$

die erste Zeile lauter positive Glieder. Die zweite Zeile ist bei $r = 0$ negativ, bei $r = \infty$ positiv, folglich bei $r = R$ null; nicht bei mehrern r, weil es in der Zeile nur einen Wechsel giebt (13). Wenn also $r > R$, so ist T positiv, $T + iU$ nicht null. Ebenso findet man bei $r > R$ unter den Voraussetzungen

$$-\cos n\varrho \geq \sqrt{\tfrac{1}{2}} \qquad \sin n\varrho \geq \sqrt{\tfrac{1}{2}} \qquad -\sin n\varrho \geq \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$-T$, U, $-U$ positiv, folglich u. s. w.

18. I. Wenn $x^n = y$ und $\varrho^n = 1$, so sind x, $x\varrho$, .., $x\varrho^{n-1}$ die konjugierten Werte der $n$ten Wurzel von y. Dann ist

$$u = a_0 + a_1 x + .. + a_{n-1}x^{n-1}$$

eine $n$deutige irrationale Funktion der y, und die konjugierten Werte derselben werden erhalten, indem man x durch $x\varrho$, .., $x\varrho^{n-1}$ ersetzt. Diese konjugierten Werte sind die Wurzeln einer Gleichung $n$ten Grades mit rationalen Coefficienten. Man bilde

$$ux = a_{n-1}y + a_0 x + a_1 x^2 + ..$$
$$ux^2 = a_{n-2}y + a_{n-1}yx + a_0 x^2 + ..$$

u. s. w. Aus dem System von n Gleichungen

$$\begin{matrix} a_0 - u + a_1 x & + a_2 x^2 & + .. = 0 \\ a_{n-1}y + (a_0 - u)x + a_1 x^2 & + .. = 0 \\ a_{n-2}y + a_{n-1}yx & + (a_0 - u)x^2 + .. = 0 \end{matrix}$$

u. s. w. folgt

$$\chi(u) = \begin{vmatrix} a_0 - u & a_1 & a_2 & . \\ a_{n-1}y & a_0 - u & a_1 & . \\ a_{n-2}y & a_{n-1}y & a_0 - u & . \\ . & . & . & \end{vmatrix} = 0,$$

die Gleichung $n$ten Grades für u, deren Wurzeln u_1, u_2, .., u_n die konjugierten Werte der u sind. In $\chi(u)$ hat u^n den Coefficienten $(-1)^n$, u^0 den Coefficienten $\chi(0)$. Nun ist (4)

$$(-1)^n u_1 \,..\, u_n = \chi(0) : (-1)^n$$

Also ist das Produkt der konjugierten Werte u die rationale Funktion $\chi(0)$ der y, und heißt die Norm der irrationalen u, welche durch Nu bezeichnet wird (§. 4, 5).

Beispiele. Wenn $x^3 = y$, so hat $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ die Norm

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 y & a_0 & a_1 \\ a_1 y & a_2 y & a_0 \end{vmatrix} = a_0{}^3 - 3a_0 a_1 a_2 y + a_1{}^3 y + a_2{}^3 y^2$$

Wenn $\beta^4 = 1$, so hat $a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 + a_3\beta^3$ die Norm

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_0{}^4 - 4a_0{}^2 a_1 a_3 + 4a_0 a_2 a_3{}^2 - a_3{}^4 \\ \quad - 2a_0{}^2 a_2{}^2 + 2a_1{}^2 a_3{}^2 \\ \quad + 4a_0 a_1{}^2 a_2 - 4a_1 a_2{}^2 a_3 \\ \quad - a_1{}^4 + a_2{}^4 \end{array}$$

$$= [(a_0 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2](a_0 - a_1 + a_2 - a_3)(a_0 + a_1 + a_2 + a_3)$$

Die Norm von $a + b\sqrt[12]{x} + c\sqrt[9]{x} + d\sqrt[8]{x}$ ist durch die Norm von $a + b\sqrt[72]{x^6} + c\sqrt[72]{x^8} + d\sqrt[72]{x^9}$ teilbar. Vergl. Meier Hirsch Aufg. aus der Theorie der algebraischen Gleichungen 1809 §. 96 ff.

II. Wenn u eine Funktion mehrerer Wurzeln ist, so bilde man zuerst die Norm derselben in Bezug auf eine der Wurzeln, welche eine Funktion der übrigen Wurzeln ist, u. s. w. Die Norm von u ist das Produkt aller konjugierten Werte von u.

Die Formel $\sqrt[\lambda]{p} + \sqrt[\mu]{q} + \sqrt[\nu]{r}$ hat $\lambda\mu\nu$ konjugierte Werte, deren Produkt eine ganze Funktion von p, q, r ist.

Die Formel $\sqrt[n]{p} + \sqrt[n]{q} + \sqrt[n]{r} + ..$ hat nnn .. konjugierte Werte, deren Produkt die $n$te Potenz einer ganzen Funktion von p, q, r, .., die Norm der gegebenen Formel ist. Wenn man einen Wert von $\sqrt[r]{q} + \sqrt[n]{r} + ..$ durch y_k und eine eigentliche $n$te Wurzel von 1 durch β bezeichnet, so sind $y_k\beta$, $y_k\beta^2$, .., $y_k\beta^{n-1}$ andre Werte derselben Formel. Bezeichnet man einen Wert der $n$ten Wurzel von p durch x, so ist die Norm von $x + \sqrt[n]{q} + \sqrt[n]{r} + ..$ das Produkt

$$(x + y_1\beta)(x + y_1\beta^2) \ldots$$
$$(x + y_2\beta)(x + y_2\beta^2) \ldots$$
$$\ldots \quad \ldots$$

eine ganze Funktion nicht nur von q, r, .., sondern auch von x^n d. i. von p, weil nach (4)

$$(x + y_k\beta)(x + y_k\beta^2) \ldots (x + y_k\beta^n) = x^n - (-y_k)^n$$

Dieſe Normen ſind von Möbius 1828 Crelle J. 3 p. 9 und Förſtemann Crelle J. 8 p. 317, 14 p. 236 näher betrachtet worden.

Die Aufgabe, aus einer Gleichung, in der irrationale Funktionen der Unbekannten vorkommen, eine Gleichung von demſelben Umfang mit rationalen Gliedern abzuleiten, iſt von Fermat den Mathematikern ſeiner Zeit vorgelegt worden (Cartesii epist. Tom. 3 p. 304). Descartes hat a. a. O. einen Auflöſungsverſuch angedeutet, der nicht zum Ziele führt. Durch Reduktion des Problems auf die Auflöſung eines Syſtems von nicht linearen Gleichungen hat Fermat (Opp. p. 60) die Lösbarkeit der Aufgabe angezeigt, ebenſo Newton (Arithm. univ. p. 64 ed. Lugd.). Daß das Produkt aller konjugierten Werte einer algebraiſchen Formel rational iſt, wurde zuerſt von Euler (Mém. de Berl. 1748 p. 234, ſowie in einer ſpätern Abhandlung 1764 Nov. Comm. Petrop. 9 p. 70) bewieſen. Durch die von Euler angewandten Mittel hat Lambert 1770 (Beiträge II^a p. 202) die Aufgabe gelöſt: aus einer gegebenen Gleichung diejenige Gleichung abzuleiten, deren Wurzeln die $n$ten Potenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung ſind. Vergl. Meier Hirſch a. a. O. Schönemann Crelle J. 19 p. 234.

19. Wenn $x^n = y$ und $\varrho^n = 1$, ſo hat

$$f(x) = a_0 + a_1 x + .. + a_m x^m$$

die Norm $f(x\varrho)f(x\varrho^2) \ldots f(x\varrho^{n-1})f(x)$, welche eine Funktion desſelben Grades der y iſt. Bei $n = 2$ erhält man $f(-x)f(x)$, eine Funktion der x^2. Bei $\varrho^3 = 1$ iſt $f(x\varrho)f(x\varrho^2)f(x)$ eine Funktion der x^3. U. ſ. w.

Wenn f null iſt, ſo iſt auch ihre Norm null: jeder Wurzel der Gleichung $f = 0$ für x entſpricht eine Wurzel der Gleichung $Nf = 0$ für y, welche von jener die $n$te Potenz iſt. Am leichteſten findet man aus der Gleichung

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + .. = 0$$

die Gleichung

$$f_1(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + .. = 0$$

deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeln von $f(x) = 0$ ſind. Man bildet $f_1(x)$, indem man $f(x)$ mit $-f(-x)$ multipliciert und x^2 durch x erſetzt, ſo daß $b_m = a_m{}^2$

$$b_{m-1} = -a_{m-1}{}^2 + 2a_m a_{m-2}$$
$$b_{m-2} = +a_{m-2}{}^2 - 2a_{m-1}a_{m-3} + 2a_m a_{m-4}$$
$$b_{m-3} = -a_{m-3}{}^2 + 2a_{m-2}a_{m-4} - 2a_{m-1}a_{m-5} + 2a_m a_{m-6}$$

u. s. w. Aus $f_1(x)$ findet man durch dasselbe Verfahren $f_2(x)$, so daß die Wurzeln von $f_2(x) = 0$ den Quadraten der Wurzeln von $f_1(x) = 0$, mithin den Biquadraten der Wurzeln von $f(x) = 0$ gleich sind. U. s. w.

Eine abgeleitete Gleichung, deren Wurzeln hinreichend hohe Potenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind, dient zur Bestimmung der Moduln dieser Wurzeln, zuerst der größten, dann der nächstkleinern, u. s. w. nach einer vorzüglichen Methode, die von Gräffe (Auflösung der höhern numerischen Gleichungen, Zürich 1837) erfunden und von Encke (Astron. Jahrb. 1841 oder Crelle J. 22 p. 193) weiter ausgeführt worden ist. Vergl. Dan. Bernoulli de seriebus recurr. 1730, Comm. Petrop. t. 3. Euler Introd. I c. 17. Klügel math. Wört. 4 p. 341 ff. Jacobi Crelle J. 13 p. 349.

20. I. Wenn $g(x) = b_0 + b_1 x + .. + b_n x^n$ ist, und x vermöge der Gleichung $g(x) = 0$ die Werte $\beta_1, \beta_2, .., \beta_n$ hat, so ist die $n$deutige algebraische Funktion (von höchstens n Gliedern)

$$f(x) = a_0 + a_1 x + .. + a_m x^m$$

eine Wurzel einer bestimmten Gleichung $n$ten Grades, deren Coefficienten ganze Funktionen der Coefficienten a und b sind. Um diese Gleichung für die Unbekannte f aufzustellen, bilde man die n Gleichungen

$$\begin{aligned} a_0 - f + a_1 x + a_2 x^2 + .. &= 0 \\ (a_0 - f)x + a_1 x^2 + .. &= 0 \\ (a_0 - f)x^2 + .. &= 0 \end{aligned}$$

u. s. w., nebst den m Gleichungen

$$\begin{aligned} b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + .. &= 0 \\ b_0 x + b_1 x^2 + .. &= 0 \\ b_0 x^2 + .. &= 0 \end{aligned}$$

u. s. w. Vermöge dieses Systems ist die Determinante $(n+m)$ten Grades

$$\varphi(f) = \begin{vmatrix} a_0 - f & a_1 & a_2 & . & . & & \\ * & a_0 - f & a_1 & a_2 & . & . & \\ * & * & a_0 - f & a_1 & a_2 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ b_0 & b_1 & b_2 & . & . & . & . \\ & b_0 & b_1 & b_2 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

null. Die Gleichung $\varphi(f) = 0$ ist $n$ten Grades für f mit den Wurzeln $f(\beta_1)$, $f(\beta_2)$, .., $f(\beta_n)$.

II. In $\varphi(f)$ hat f^n den Coefficienten $(-1)^n b_n{}^m$, und wenn man $\varphi(0)$ durch diesen Coefficienten dividiert, so findet man das mit $(-1)^n$ multiplicierte Produkt der Wurzeln von $\varphi(f) = 0$ (4). Also ist

$$b_n{}^m f(\beta_1) \,..\, f(\beta_n) = \varphi(0)$$

Setzt man $f(x) = a_m(x - \alpha_1) \,..\, (x - \alpha_m)$, so findet man

$$f(\beta_1) = a_m(\beta_1 - \alpha_1) \,..\, (\beta_1 - \alpha_m)$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$f(\beta_n) = a_m(\beta_n - \alpha_1) \,..\, (\beta_n - \alpha_m)$$

Nun ist $b_n(\beta_1 - x) \,..\, (\beta_n - x) = (-1)^n g(x)$, folglich

$$\varphi(0) = b_n{}^m f(\beta_1) \,..\, f(\beta_n) = (-1)^{mn} a_m{}^n g(\alpha_1) \,..\, g(\alpha_m)$$
$$= a_m{}^n b_n{}^m D(\alpha_1, .., \alpha_m \mid \beta_1, .., \beta_n)$$

indem man durch $D(..\mid..)$ das Produkt der mn Differenzen bezeichnet, welche durch Subtraktion aller α von allen β entstehen.

III. Das Produkt der konjugierten Werte $f(\beta_1) \,..\, f(\beta_n)$ mit $b_n{}^m$, oder der konjugierten Werte $g(\alpha_1) \,..\, g(\alpha_m)$ mit $(-1)^{mn} a_m{}^n$, oder aller Differenzen $\beta - \alpha$ mit $a_m{}^n b_n{}^m$ ist $\varphi(0)$, eine Form $n$ten Grades der Coefficienten a und eine Form $m$ten Grades der Coefficienten b, und heißt die Resultante der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ in Bezug auf die Variable x*).

Wenn z. B. die Coefficienten a_m, a_{m-1}, a_{m-2}, .. und b_n, b_{n-1}, b_{n-2}, .. Formen der y, z von 0, 1, 2, .. Dimensionen sind, wenn demnach $f(x)$ und $g(x)$ Formen der x, y, z sind, jene von m Dimensionen, diese von n Dimensionen, so ist ihre Resultante $\varphi(0)$ eine Form der y, z von mn Dimensionen. Denn bei der Vertauschung von y und z mit yt und zt gehen

$$a_m,\ a_{m-1},\ a_{m-2},\ ..,\ b_n,\ b_{n-1},\ b_{n-2},\ ..$$

der Reihe nach über in

$$a_m,\ a_{m-1}t,\ a_{m-2}t^2,\ ..,\ b_n,\ b_{n-1}t,\ b_{n-2}t^2,\ ..$$

---

*) Euler Mém. de Berlin 1748 p. 234. Vergl. des Verf. Determ. §. 11.

(§. 2, 9). Dabei gehen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots$ der Reihe nach über in

$$\alpha_1 t, \ \alpha_2 t, \ \ldots, \ \beta_1 t, \ \beta_2 t, \ \ldots$$

(4, vergl. §. 7, 1); folglich erhält das Produkt aller mn Differenzen $\beta - \alpha$ den Multiplikator t^{mn}, d. h. $\varphi(0)$ geht über in $t^{mn}\varphi(0)$, die Gleichung $\varphi(0) = 0$ ist für die Unbekannte $y : z$ vom mnten Grad.

Wenn die Resultante $\varphi(0)$ verschwindet, so verschwindet wenigstens eine unter den Differenzen $\beta - \alpha$, und die bei demselben Wert von x verschwindenden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ haben einen gemeinschaftlichen Divisor $h(x)$, dessen Coefficienten zufolge des Systems $f(x) = 0$, $xf(x) = 0, \ \ldots, \ g(x) = 0, \ xg(x) = 0, \ \ldots$ ganze Funktionen der Coefficienten a und b sind. Nachdem man alle Werte von y berechnet hat, bei welchen $\varphi(0)$ null ist, findet man aus der Gleichung $h(x) = 0$ die entsprechenden Werte von x, welche zusammen dem System $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ genügen. Vergl. §. 6, 9.

21. Zur Formulierung des größten gemeinschaftlichen Divisor der ganzen Funktionen

$$f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$
$$g = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$$

bilde man aus $f, xf, x^2 f$ und aus $g, xg, x^2 g, x^3 g$

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & & \\ & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \\ & & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & & & \\ & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & & \\ & & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \\ & & & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

ferner aus $f, xf, g, xg, x^2 g$

$$S = \begin{vmatrix} a_0 + a_1 x & a_2 & a_3 & a_4 & \\ a_0 x & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 + b_1 x & b_2 & b_3 & & \\ b_0 x & b_1 & b_2 & b_3 & \\ & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = S_0 + S_1 x$$

und aus f, g, xg

$$T = \begin{vmatrix} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 & a_3 & a_4 \\ b_0 + b_1 x + b_2 x^2 & b_3 & \\ b_0 x + b_1 x^2 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = T_0 + T_1 x + T_2 x^2$$

u. ſ. w., wenn f und g höherer Grade ſind. Wenn man zu den erſten Kolonnen dieſer Syſteme die mit entſprechenden Potenzen von x multiplicierten folgenden Kolonnen addiert, ſo bleiben die Determinanten unverändert. Indem man die Determinanten der transformierten Syſteme nach der erſten Kolonne entwickelt, findet man

$$\begin{aligned} R &= Pf + Qg \\ S &= P_1 f + Q_1 g \\ T &= P_2 f + Q_2 g \end{aligned}$$

Ausdrücke, welche zu erkennen geben, daß jeder gemeinſchaftliche Diviſor von f und g in R, S, T aufgeht.

Wenn nun R nicht null iſt, ſo haben f und g keinen von x abhängigen gemeinſchaftlichen Diviſor. Wenn $R = 0$ und S nicht bei allen x null iſt, ſo haben f und g den größten gemeinſchaftlichen Diviſor S erſten Grades. Wenn $R = 0$, $S = 0$ bei allen x, und T nicht bei allen x null iſt, ſo haben f und g den größten gemeinſchaftlichen Diviſor T zweiten Grades. U. ſ. w. Jede Löſung des Syſtems $R = 0$, $S = 0$ (oder des Syſtems $R = 0$, $T = 0$, wenn $S = 0$ eine Identität) iſt eine Löſung des Syſtems $f = 0$, $g = 0$.

Anmerkung. Aus zwei gegebenen Funktionen f $m$ten Grades und g $n$ten Grades von x, die einen gemeinſchaftlichen Diviſor nicht haben, kann eine gegebene Funktion φ $(m + n - 1)$ten oder niedern Grades mit Hilfe von beſtimmten Multiplikatoren p $(n - 1)$ten Grades und q $(m - 1)$ten Grades komponiert werden. Denn zufolge des Syſtems von $1 + n + m$ Zeilen

$$\begin{array}{rcccccc} \varphi = & c_0 & + & c_1 x & + & c_2 x^2 & + \ldots \\ f = & a_0 & + & a_1 x & + & a_2 x^2 & + \ldots \\ xf = & & & a_0 x & + & a_1 x^2 & + \ldots \\ x^2 f = & & & & & a_0 x^2 & + \ldots \\ \ldots & \ldots & & \ldots & & \ldots & \\ g = & b_0 & + & b_1 x & + & b_2 x^2 & + \ldots \\ xg = & & & b_0 x & + & b_1 x^2 & + \ldots \\ \ldots & \ldots & & \ldots & & \ldots & \end{array}$$

iſt bei allen x

$$\begin{vmatrix} \varphi & c_0 & c_1 & c_2 & \cdot\cdot \\ f & a_0 & a_1 & a_2 & \cdot\cdot \\ xf & & a_0 & a_1 & \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot \\ g & b_0 & b_1 & b_2 & \cdot\cdot \\ xg & & b_0 & b_1 & \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot \end{vmatrix} = 0$$

und durch Entwickelung nach der ersten Kolonne

$$R\varphi - pf - qg = 0, \quad R\varphi = pf + qg.$$

Vergl. die Anmerkung zu (7) und §. 2, 7.

Entwurf einer Tabelle zur Geschichte der Mathematik.

Vorchristliche Zeit.

Lykurgus 884. Olympische Spiele.
Drakon 620. Solon. Servius Tullius.
Pisistratus 560. Homerische Gesänge. Cyrus.
Anakreon.
Schlacht bei Marathon 490. Coriolanus.
Äschylus. Pindarus. Herodotus.
Sophokles. Sokrates. Demokritus.
Hippokrates von Kos.
Perikles 444. Phidias.
Thucydides. Aristophanes. Platon.

Demosthenes. Aristoteles.
Alexandria 332. Septuaginta.
Pyrrhus. Hannibal.

Aristarchus. Karthago erobert 146.
Sulla. Lucretius. Sosigenes 46.
Cäsar. Augustus 30.

Thales.

Pythagoras.

Hippokrates von Chios.

Archytas.
Eudoxus von Knidos 380. Menächmus.
Dinostratus. Aristäus.

Euklides 300. Aristarchus von Samos.
Konon. Archimedes († 212).
Eratosthenes. Nikomedes. Diokles.
Geminus. Ktesibius. Heron.
Apollonius.
Hipparchus 160. Perseus.

Nachchristliche Zeit.

Vitruvius 40. Plinius.
Trajanus 98.

Theodosius 379. Ulfilas.
Vulgata. Attila.
Justinian.
Gregor I. Mohammed 622.
Bagdad. Karl der Große 768.

Theodosius. Menelaus. Frontinus.
Nikomachus. Ptolemäus.
Pappus.
Diophantus. Theon. Hypatia.
Serenus. Proklus 450.
Boëthius 500. Eutokius 540. Simplicius.

Harun al Raschid. Almamun.

Römerzüge. Mahmud I. Firdusi.
Gregor VII. 1073. Kreuzzüge.
Friedrich II. 1215. Nibelungenlied. Gudrun. Hartmann.
Wolfram. Gottfried. Walter.
Marco Polo.
Dante 1300. Petrarca. Boccaccio.
Renaissance. Berthold Schwarz.
Hussiten 1419. Guttenberg 1438.
Manutius. Aldus.
Konstantinopel erobert 1453.
Mediceer 1472. Universitäten.
Leonardo. Columbus 1492.

Mohammed ben Musa 820.
Albatani 880.
Mohammed von Bagdad 950.
Alhazen 1000.

Leonardo von Pisa 1200.

Roger Bacon 1270.

Vitello 1320.

Nic. von Cusa 1430.

Peurbach. Regiomontan 1464.

Lucas de Burgo 1494.

1500

Macchiavelli 15. Luther 17.

Dürer. Kranach. Michel Angelo.
Rafael. Tizian. P. Vischer. Camoens.
Seb. Brant. Paracelsus. Erasmus.
Palestrina. Tasso 70. Shakespeare.

Scipione dal Ferro 05. Tartalea 30. Ferrari 40. Cardanus 45.
A. Riese. Rudolph 24. Stifel 44.
Copernicus 30 (43). Nonius 46.
Gerh. Mercator 50. Bombelli 79.
Tycho de Brahe 80. Stevin 85. Viète.

1600

Cervantes. Lope de Vega. Calderon.
Gilbert. Rubens. Rembrandt. Van Dyck.
Claude Lorrain. Bacon von Verulam 05. 20. Harvey 19.
Richelieu. Grotius. Wallenstein.
Louis XIV. Cromwell. Murillos.
Spinoza 70. Pufendorf. Thomasius 87.
Locke 90.

Harriot. Keppler 09. 19. Galilei 10. 33. 38. Neper 14. Caus 15. Snell 17.
Cavalieri 32. Guldin 35. Robervall 31.
Desargues 36. Descartes 37. Pascal 40.
Torricelli 44. Fermat. Pell.
Guericke 50. Wallis 55. Huygens 54. 73.
Wren. Gregory. Nic. Mercator.
Newton 87. Leibniz 84.
Lahire. Varignon. Viviani.
Jacob Bernoulli. Johann Bernoulli. Halley.

1700

Stahl 18. Fahrenheit 20. Bradley.
Linné 35. Montesquieu 48.
Franklin 50. Volta 75. 99.
Buffon 80. Watt 80.

Cotes 13. Taylor 15. Stirling 17. Maclaurin 20. Moivre.
Daniel Bernoulli. Riccati. Clairaut Euler 30. 41. 66.